УДК 004:37

Кушнір В.А.
Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка, Кіровоград, Україна

ТЕХНОЛОГІЯ БІНАРНИХ ЗАНЯТЬ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ІНФОРМАТИКИ У ВНЗ НА ОСНОВІ MAPLE-СЕРЕДОВИЩА

DOI: 10.14308/ite000546

Досліджуються проблеми методичних основ створення технології бінарних занять з диференціальних рівнянь і інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) на основі Maple-технології. Актуальність дослідження випливає з основної суперечності між новітніми можливостями сучасних ІКТ, зокрема Maple, і традиційними методами навчання математичних дисциплін, зокрема і диференціальних рівнянь. На сьогодні вже недостатньо тільки епізодичних застосувань при проведенні занять з математики. Можливості Maple-технології такі, що навчання з диференціальних рівнянь можна проводити безпосередньо ІКТ. При цьому потрібно розв'язувати проблему органічного поєднання традиційних способів розв'язування диференціальних рівнянь і можливостей Maple-технології щодо виконання дій досить високого узагальнення.

До таких дій відносяться спрощення виразів, розв'язування алгебраїчних рівнянь і систем, знаходження власних значень і власних векторів матриць, диференціювання й інтегрування скалярних функцій, вектор-функцій, матриць-функцій, множення матриць і матриць на вектори, знаходження оберненої матриці тощо. Бінарні заняття покликані навчати математики й інформатики одночасно. Тому створення технології бінарних занять досить складна проблема. Насамперед викладачеві потрібно розробити алгоритм певного способу розв'язування диференціального рівняння чи системи диференціальних рівнянь.

При цьому алгоритм повинен складатися з дій, котрі можна автоматизувати у системі Maple-технології. Такі дії мають технічний характер і не є смислово-твірними діями способу розв'язування задачі. Тоді усі зусилля й увага суб'єктів учіння будуть спрямовані на спосіб розв'язування, створення відповідного алгоритму і програми у Maple-технології.

Написання і налагодження програми відповідно алгоритму здійснюється одночасно. Можна після написання одного чи декількох операторів відразу запускати їх і отримати проміжні результати. Це дає змогу водночас налагодити групу чи один оператор і побачити результат його виконання і відразу здійснити корегування в потрібному напрямку.

Лекційні заняття можна проводити в такій послідовності. Спочатку теоретично висвітлювати спосіб розв'язування диференціальних рівнянь. Найкраще це робити по пунктах, одночасно створюючи і відповідний алгоритм. При цьому в основі створення алгоритму повинні лежати і сам спосіб розв'язування і дії, котрі будуть автоматизовані у Maple-технології. Алгоритм і складається із послідовності виконання саме таких дій.

Наводяться приклади розв'язування різних диференціальних рівнянь у Maple-технології.

Ключові слова: *диференційні рівняння, способи розв'язування диференційних рівнянь, Maple-технологія, бінарні заняття, алгоритми, програми, технічні дії.*

Виникнення нових інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) із зовсім новими можливостями, а також створення все нових версій існуючих ІКТ з також новими можливостями, зростаюче впровадження ІКТ у ВНЗ при викладанні різних дисциплін, зокрема і математики, породили низку проблем: зміна змісту математичних і інформатичних дисциплін; зміна навчальних планів і програм з математичних дисциплін і інформатики і їх узгодження; зміна методів і форм навчання в умовах інформатизації навчального процесу; розробка нових технологій навчання математики в умовах інформатизації навчального процесу. Те ж саме можна сказати і про інформатичні дисципліни.

Відомий український вчений В.Ю. Биков зазначає: «Проникнення ІКТ у навчальний процес створює передумови для кардинального оновлення як змістовно-цільових, так і технологічних сторін навчання, що виявляється у суттєвому збагаченні системи дидактичних прийомів, засобів навчання і на цій основі – у формуванні нетрадиційних педагогічних технологій, застосованих на використанні комп'ютерів» [2, с. 141].

Можливості сучасних ІКТ дозволяють створювати різні моделі їх використання при викладанні математики. Одним з наукових підходів такого використання є створення бінарних занять з математики і інформатики. При цьому бінарне заняття автором тлумачиться як навчання на одному занятті певної математичної та певної інформатичної дисциплін.

Комп'ютерна математика розвивається досить швидко. В Україні різні напрямки комп'ютерної математики та технологій їх використання при навчанні математики та інших дисциплін у школах і ВНЗ успішно розвиваються академіками М.І. Жалдаком, В.Ю. Биковим та їхніми колегами й учнями Ю.В. Триусом, Н.В. Морзе, Ю.С. Рамським, С.А. Раковим, С.О. Семіряковим та ін.

Метою статті є розробка методичних основ створення технології бінарних занять з диференціальних рівнянь і Maple-технології, котрі полягають у навчанні диференціальних рівнянь у системі Maple-технології. ***Предметом*** дослідження виступають технології бінарних занять з диференціальних рівнянь і Maple-технології. Основні ***завдання*** статті є такі: пошук і розробка наукових підходів щодо створення технології бінарних занять з наведених вище навчальних дисциплін; обґрунтування визначення бінарних занять з наведених вище навчальних дисциплін як навчання диференціальних рівнянь у Maple-технології; розробка методичного прийому одночасного написання і налагодження програми в Maple-технології; створення основ методики розробки алгоритмів способів розв'язування диференціальних рівнянь на основі можливостей Maple-технології щодо виконання узагальнених дій; створення та налагодження програм у Maple на основі алгоритмів способів розв'язування диференціальних рівнянь.

Наявність, з одного боку, значної кількості різних ІКТ з різними можливостями не дає змоги вивчати їх усі глибоко і детально (обмеженість у часі). Деякі з них вивчаються оглядово, поверхово, а то і зовсім не вивчаються. Так ІКТ Maple у педагогічних ВНЗ на фізико-математичних факультетах або зовсім не вивчаються, або студенти ознайомлюються з деякими можливостями Maple на практикумах. Те ж саме можна сказати і про низку інших ІКТ. З іншого боку, саме ІКТ з символьними обчисленнями, котрою є і Maple-технологія, надають змогу виконання точних обчислень, громіздких перетворень, побудови складних графіків і рисунків, виконувати математичні дії високого рівня узагальнення [4] тощо.

Саме можливості Maple-технології щодо виконання дій високого рівня узагальненості дозволяють змінювати зміст математичних дисциплін. Адже математика розвивається досить швидко, що вимагає корекції змісту математичної освіти майбутніх вчителів математики, фізики, інформатики в напрямку його розширення, включення нових тем. Однак проблема розширення змісту математичних дисциплін насамперед полягає в часових обмеженнях.

Сучасне інформаційне суспільство буквально «пронизує» інформатизацією усі сфери людської діяльності, зокрема й освіту. Така глобальна тенденція вимагає від ВНЗ створення глобального навчально-інформаційного середовища. Сюди можна віднести:

можливості технологій дистанційного навчання і їх впровадження у ВНЗ, що зокрема допоможе розв'язувати проблеми консультацій і зворотного зв'язку між викладачами і студентам; організацію навчання за дистанційною формою студентів, котрі працюють; вільний в будь-який час доступ до наукових джерел, підручників, посібників і методичних рекомендацій; вільний доступ до хмарних технологій з використанням їх можливостей; спілкування через Інтернет в глобальному масштабі тощо. Все це вимагає від викладачів і студентів фізико-математичних факультетів не тільки математичної, а й інформатичної компетентності і культури.

Інформаційне суспільство все більше надає можливостей виконання дій високого рівня узагальнення в автоматичному режимі. До них відносяться обчислення інтегралів, розв'язування алгебраїчних і диференціальних рівнянь і систем рівнянь, задачі лінійного і випуклого програмування, спрощення складних виразів тощо. Такі узагальнені дії можна виконувати однією командою в ІКТ середовищах, однією з котрий є Maple-середовище. Склалася ситуація чимось подібна до ситуації, коли з'явилися калькулятори. Тоді «зник» з навчального процесу усний рахунок, хоча психологи і педагоги одностайно заявляли про те, що усний рахунок є важливим чинником розумового розвитку учнів. На зміну усному рахунку прийшли алгоритми, програмування, відповідні задачі зовсім нового змісту, що відповідало розвитку суспільних і світових тенденцій у науці й освіті на той час. На сьогодні ІКТ з можливостями виконання узагальнених дій уже доступні широкому колу користувачів, зокрема студентів. У навчальний процес ІКТ-технології проникають незалежно від учителів чи викладачів ВНЗ. Тому настала нагальна проблема розробки технологій використання ІКТ-технологій при навчанні математичних дисциплін, зокрема Maple-технології.

Нашим завданням є створення технології бінарних занять математичних і інформатичних дисциплін з тим, щоб: 1) Виконувати студентами і магістрантами уже відомі їм дії (котрі можна вважати операціями) в середовищі Maple (автоматизувати операції), залишаючи тільки дії, коті є смисловими твірними теми і проблеми навчальної ситуації. Тоді можна очікувати економію часу і включити в зміст певної математичної дисципліни нові теми. 2) Робота в Maple-середовищі дозволить при створенні навчальної ситуації з певної теми сконцентрувати увагу й зусилля викладача і студентів на суті і змісті проблеми, котра розв'язується, наприклад, на способі і відповідному алгоритмі розв'язування диференціальних рівнянь чи рівнянь математичної фізики, адже допоміжні обчислення можуть забирати 30%-70% навчального часу. 3) Кожна математична тема вимагатиме від студентів використання відповідних можливостей Maple, котрі суб'єктам учіння потрібно відшукати в літературних джерелах чи в довіднику Help Maple, розібратися з відповідними операторами і їх можливостями і застосувати до автоматизації потрібних дій за допомогою викладача чи самостійно. Отже, поглиблюються і розширюються знання й уміння з Maple-технології. 4) Використання ІКТ вимагає досить чітких і детальних знань з математичних дисциплін. Адже не можна запрограмувати, наприклад, певний спосіб розв'язування диференціальних рівнянь, коли не розумієш його чи не чітко уявляєш відповідний алгоритм його реалізації. 5) Розв'язання навчальної ситуації у Maple-технології (чи іншій ІКТ) надає суб'єктам учіння значно більші можливості для вираження власних ідей, переваг, оцінки власних знань і умінь та знань і вмінь інших, більш явного вираження позитивних емоцій в разі успіху (а успіх буде обов'язковий, адже поруч викладач), формування індивідуального шляху учіння, розширення і поглиблення знань і умінь з Maple, формування інформативчної компетентності і інформатичної культури в аспекті застосування ІКТ при розв'язуванні навчальних ситуацій з певної математичної дисципліни. 6) Суб'єкти учіння через ІКТ входять в інформаційне суспільство, відчувають себе його органічною частиною, що значно сприяє формуванню і розвитку їх професійних компетентностей, зокрема математичних та інформатичних, входженню в суспільство загалом. 7) Саме оволодіння принадами сучасного інформаційного суспільства розгортає нові можливості входженню майбутнього вчителя в суспільство як повноцінного його члена. У такий спосіб розвиваються не тільки професійні якості студентів чи магістрантів, а і суспільні, котрі відображають в індивіді особистість, громадянина країни. Відбувається більш активний розвиток особистості студента чи магістранта.

При нашому підході викладачеві потрібно розробляти технологію проведення занять з математики в середовищі певної ІКТ, наприклад – в середовищі Maple. Тому формування і розв'язування навчальної ситуації під час занять в певному ІКТ-середовищі ми і будемо вважати як бінарне заняття з математики і інформатики. Адже тут розв'язуються одночасно в єдиній системі проблеми навчання математики, навчання інформатики і застосування отриманих знань і умінь з інформатики у навчанні математики. Точніше можна сказати, що потрібно створити технологію навчання математики в ІКТ-середовищі, наприклад навчання диференціальних рівнянь в Male-середовищі.

На сьогодні методи варіації довільних сталих і невизначених коефіцієнтів розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у змісті математичної освіти для фізико-математичних факультетів носять фундаментальний характер. Адже наведені методи як наукові підходи застосовуються і при вивченні інших тем математичних дисциплін (інтегрування раціональних функцій методом розкладання на елементарні дроби, розв'язування систем диференціальних рівнянь тощо). Водночас у студентів уже сформовані знання з інформатики: операції присвоєння, циклу, розгалуження, підстановки, умов виконання дій тощо, котрі мають фундаментальний характер в інформатиці [7, 8]. Тому при розв'язуванні диференціальних рівнянь у середовищі Maple суб'єкти учіння поширюють свої фундаментальні знання з інформатики на нове ІКТ – Maple-технологію.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами в середовищі Maple-технології. Особливо такі заняття корисні і необхідні для майбутніх математиків та інформатиків. При чому таку технологію можна використовувати як на практичних заняттях, так і при проведенні лекції. Зауважимо, що годин на математичні дисципліни на спеціальності «Інформатика» досить мало у співвідношенні з обсягом відповідних програм. Тому автоматизація проміжних дій досить доречна. Окрім цього посилюється професійна підготовка саме з інформатики.

Будемо розглядати неоднорідні диференціальні рівняння оскільки розв'язування однорідних фактично відображено у відповідних алгоритмах і програмах як їх частин.

Тема заняття: *«Метод варіації довільних сталих при розв'язуванні неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами».*

<u>Приклад 1.</u> Знайти розв'язок задачі Коші.

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}'' + 4\cdot \boldsymbol{Y} = \dfrac{4}{\boldsymbol{cos}(2\boldsymbol{x})} \\ \boldsymbol{Y}(0) = 2 \\ \boldsymbol{Y}'(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

<u>*Розв'язування.*</u> Спочатку потрібно чітко уяснити спосіб (чи метод) варіації довільних сталих і написати відповідний алгоритм з урахуванням можливостей Maple, котрий і буде слугувати основою для створення відповідної програми в середовищі Maple-технології. Алгоритм у загальному вигляді (для рівняння довільного порядку) подається студентам під час лекції. Тут наводиться алгоритм для диференціальних рівнянь другого порядку. Однак це не зменшує ідейної суті підходу створення технології проведення бінарних занять з математики і інформатики.

Алгоритм 1 методу варіації довільних стали:

1. Записуємо відповідне неоднорідному рівнянню системи (1) однорідне диференціальне рівняння;

$$Y'' + 4Y = 0 \; . \tag{2}$$

2. Записуємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені;

$$\lambda^2 + 4 \cdot \lambda = 0, \;\; \lambda 1 = 2i, \;\; \lambda 2 = -2i$$

3. Відповідно знайденим кореням характеристичного рівняння записуємо два лінійно незалежні часткові розв'язки однорідного рівняння;

$$y1 := cos(2x), \;\; y2 := sin(2x)$$

4. Записуємо загальний розв'язок однорідного рівняння;

$$Yzo = c1 \cdot y1 + c2 \cdot y2 \tag{3}$$

5. Уважаємо, що довільні сталі в загальному розв'язку (3) однорідного рівняння є функції від х

$$Yzn = c1(x) \cdot cos(x) + c2(x) \cdot sin(x) \tag{4}$$

і підберемо їх так, щоб отримати загальний розв'язок неоднорідного рівняння;

6. У похідній загального розв'язку

$$Yzn' = c1'(x) \cdot y1 + c2'(c) \cdot y2 + c1(x) \cdot y1' + c2(x) \cdot y2' \tag{5}$$

прирівнюємо до нуля суму доданків, що містять похідні невідомих функцій $c1'(x) \;\; i \;\; c2'(x)$

$$c1'(x) \cdot y1 + c2'(x) \cdot y2 = 0 \tag{6}$$

і отримуємо перше рівняння (6) відносно двох невідомих функцій-похідних $c1'(x) \;\; i \;\; c2'(x)$;

7. Від виразу, що лишився від першої похідної

$$Yzn' = c1(x) \cdot y1' + c2(x) \cdot y2' \tag{7}$$

беремо ще одну похідну

$$Yzn'' = c1(x) \cdot y1'' + c2(x) \cdot y2'' + c1'(x) \cdot y1' + c2'(x) \cdot y2' \tag{8}$$

8. Підставляємо значення функції (3), що є загальним розв'язком, в неоднорідне диференціальне рівняння (1) і після перетворень і спрощень отримуємо друге рівняння з невідомими похідним двох функцій $c1'(x) \;\; i \;\; c2'(x)$;

$$c1'(x) \cdot y1' + c2'(x) \cdot y2' = \frac{4}{cos(2x)} \tag{9}$$

9. Одержали систему двох лінійних рівнянь (6) і (9) з невідомими похідними $c1'(x) \;\; i \;\; c2'(x)$

$$\begin{cases} c1'(x) \cdot y1 + c2'(x) \cdot y2 = 0 \\ c1'(x) \cdot y1' + c2'(x) \cdot y2' = \dfrac{4}{cos(2x)} \end{cases} \tag{10}$$

10. Розв'язуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь (10) з двома невідомими $c1'(x)$ і $c2'(x)$ і отримуємо похідні двох невідомих функцій:

$$c1'(x) = f1(x) \text{ і } c2'(x) = f2(x) \tag{11}$$

11. Беремо два невизначені інтеграли від (11) і отримуємо самі функції;

$$c1(x) = \int f1(x)\cdot dx + d1, \ \ c2(x) = \int f2(x)\cdot dx + d2, \tag{12}$$

де d1 і d2 довільні сталі

12. Підставляємо значення (12) в (3) і одержуємо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2)

$$d1\cdot y1 + d2\cdot y2 + y1\cdot\int f1(x)\cdot dx + y1\cdot\int f2(x)\cdot dx \tag{13}$$

13. Здійснюємо перевірку підстановкою (13) в (2)

14. Числові значення d1 і d2 знаходимо з початкових умов задачі (1).

15. Підставляємо їх у (13) і одержуємо розв'язок задачі Коші (1).

Відповідно наведеному вище алгоритму створюється програма в середовищі Maple. Причому *програма створюється одночасно з перевіркою роботи операторів.* Для цього записують на моніторі в Maple-програмі один чи декілька операторів, тиснуть «Enter» і виправляють помилки, якщо вони є. Водночас видно результати роботи операторів, що дає можливість на кожному кроці перевіряти і роботу операторів та відразу корегувати програму у відповідному напрямку. Якщо студенту чи магістранту щось незрозуміло, то він може зайти в Help Maple і поповнити необхідні знання, чи подивитися на хмарці університету, де є методичні розробки, чи запитати викладача або товариша.

Суб'єкти учіння мають змогу з хмарки викликати методичні розробки відповідного бінарного заняття. Насамперед там до даного заняття повинен буди перелік операторів Maple, котрі будуть застосовуватися на цьому занятті.

У нашому випадку потрібними операторами є такі.

restart – поновлюється старт програми. Значення ідентифікаторів теперішньої пргграми нівелюються.

solve(…) – в дужках стоїть рівняння чи система рівнянь і змінні, відносно котрих розв'язується рівняння чи система рівнянь.

:= оператор присвоєння.

diff(f(x),x$n) – виконується диференціювання функції f(x) по x n разів.

combine(f(x)) – виконується спрощення виразу f(x), у нашому випадку спрощення тригонометричних та інших виразів

assign(f1(x)=f2(x)) **–** у програмі вирази f1(x) і f2(x) вважаються тотожніми

int(f(x),x) **–** береться невизначений інтеграл від функції f(x) по x.

simplify(f(x)) **–** спрощується вираз f(x).

expand(f(x)) **–** розкриваються дужки у виразі і зводяться подібні члени.

assign(f1(x)=f2(x)) **–** вирази в дужках однакові.

; в кінці оператора – результати роботи оператора будуть виведені на монітор.

: в кінці оператора – результати роботи оператора не будуть виведені на монітор.

Ще раз зауважимо, що *програма водночас створюється і налагоджується*. Наш педагогічний багаторічний експеримент показав доцільність такого підходу. Звичайно, потрібно знати, що «частина програми» не буде виконуватися, якщо будуть помилки. Нове навчально-інформаційне середовище надає можливість суб'єктам учіння здійснювати індивідуальний комп'ютерний експеримент, що створює навчальну ситуацію з елементами гри, пошуку, дослідження, що активізує студентів.

Головною перевагою розв'язування прикладів у Maple-технології є автоматизація дій, котрі не є смисловими твірними методу розв'язування диференціального рівняння (автоматизація операцій стосовно методів розв'язування). Такими операціями у нашому прикладі будуть: диференціювання, спрощення виразів, інтегрування, розв’язування рівнянь і систем рівнянь, котрі при розв’язуванні деяких прикладів можуть забрати левову частку зусиль і часу. Тоді зусилля й увага суб’єктів учіння при розв’язування прикладів буде зосереджене на методах розв’язування, їх алгоритмах і реалізації алгоритмів в Maple-технології, що значно підвищує розуміння методу і водночас розширюються і поглиблюються знання й уміння з Maple-технології. Звичайно, при цьому на початку буде потрібний час і зусилля для написання і налагодження програми у Maple. Однак такі зусилля далеко не марні: поглиблюються і розширюються знання з Maple, формуються інтегративні знання, створюється зовсім нове для суб’єктів учіння навчально-інформаціне середовище, однією з особливостей котрого є дослідницька складова учіння за рахунок комп’ютерного експерименту та можливість автоматизації операцій (рутинних дій).

Нижче наводиться створена у такий спосіб програма і результати її роботи.

Зазначимо, що ми вивели на друк не всі моменти методу варіації довільних сталих. Однак у програмі вони є. Тому програма тільки разом з виведеною після її виконання інформацією створює повну картину процесу розв’язування диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих. У цьому певна незручність такого підходу – програма «вгорі», а результати її роботи «внизу», що може не поміститися на екрані монітору. Проте, якщо розміри монітору достатні для виведення двох-трьох вікон, то ця незручність зникає.

З огляду на обмеженість розміру статті ми в ній не подаємо (за виключенням першої програми) проміжних результатів, як того вимагає бінарна технологія. Читач зможе, запустивши програму, висвітити їх на моніторі.

<u>Програма 1.</u>

$restart:$

$Y'' + 4\,Y = \dfrac{4}{\cos(2\,x)};$

$Y'' + 4\,Y = 0;$

$solve\left(\lambda^2 + 4 = 0, \{\lambda\}\right);$

$y1 := \cos(2\,x);\ y2 := \sin(2\,x);$

$Yzo := c1\cdot y1 + c2\cdot y2;$

$Yzn := c1(x)\cdot\cos(2\,x) + c2(x)\cdot\sin(2\,x);$

$Yzn1 := diff(Yzn, x\$1);$

$\left(\dfrac{d}{dx}\,c1(x)\right)\cos(2\,x) + \left(\dfrac{d}{dx}\,c2(x)\right)\sin(2\,x) = 0;$

$Yzn1 := -2\,c1(x)\sin(2\,x) + 2\,c2(x)\cos(2\,x);$

$Yzn2 := diff(-2\,c1(x)\sin(2\,x) + 2\,c2(x)\cos(2\,x), x\$1);$

$Yzn2 + 4\,Yzn = \dfrac{4}{\cos(2\,x)};$

$$S := combine\left(solve\left(\left\{\left(\frac{d}{dx}\,c1(x)\right)\cos(2\,x) + \left(\frac{d}{dx}\,c2(x)\right)\sin(2\,x) = 0, -2\left(\frac{d}{dx}\,c1(x)\right)\sin(2\,x) + 2\left(\frac{d}{dx}\,c2(x)\right)\cos(2\,x) = \frac{4}{\cos(2\,x)}\right\}, \left\{\left(\frac{d}{dx}\,c1(x)\right), \left(\frac{d}{dx}\,c2(x)\right)\right\}\right)\right);$$

$assign\left(int\left(\dfrac{d}{dx}\,c1(x), x\right) = \mathrm{int}\left(-\dfrac{2\sin(2\,x)}{\cos(2\,x)}, x\right) + d1\right);\ 'c1(x)' = c1(x);$

$assign\left(int\left(\dfrac{d}{dx}\,c2(x), x\right) = int(2, x) + d2\right);\ 'c2(x)' = c2(x);$

$'Yzn' = simplify(Yzn);$

$combine(Yzn2 + 4\,Yzn) = \dfrac{4}{\cos(2\,x)};$

$Yzn := \cos(2\,x)\ln(\cos(2\,x)) + \cos(2\,x)\,d1 + \sin(2\,x)\,d2 + 2\sin(2\,x)\,x;$

$d1 := 0;\ d2 := 1;$

$'Yzn' = Yzn;$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,Y(x) + 4\,Y(x) = \frac{4}{\cos(2\,x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} Y(x) + 4 Y(x) = 0$$

$$\{\lambda = 2I\}, \{\lambda = -2I\}$$

$$y1 := \cos(2x)$$

$$y2 := \sin(2x)$$

$$Yzo := c1 \cos(2x) + c2 \sin(2x)$$

$$Yzn := c1(x) \cos(2x) + c2(x) \sin(2x)$$

$$Yzn1 := \left(\frac{d}{dx} c1(x)\right) \cos(2x) - 2 c1(x) \sin(2x) + \left(\frac{d}{dx} c2(x)\right) \sin(2x) + 2 c2(x) \cos(2x)$$

$$\left(\frac{d}{dx} c1(x)\right) \cos(2x) + \left(\frac{d}{dx} c2(x)\right) \sin(2x) = 0$$

$$Yzn1 := -2 c1(x) \sin(2x) + 2 c2(x) \cos(2x)$$

$$Yzn2 := -2\left(\frac{d}{dx} c1(x)\right) \sin(2x) - 4 c1(x) \cos(2x) + 2\left(\frac{d}{dx} c2(x)\right) \cos(2x) - 4 c2(x) \sin(2x)$$

$$-2\left(\frac{d}{dx} c1(x)\right) \sin(2x) + 2\left(\frac{d}{dx} c2(x)\right) \cos(2x) = \frac{4}{\cos(2x)}$$

$$S := \left\{\frac{d}{dx} c1(x) = -\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)}, \frac{d}{dx} c2(x) = 2\right\}$$

$$c1(x) = \ln(\cos(2x)) + d1$$

$$c2(x) = 2x + d2$$

$$Yzn = \cos(2x) \ln(\cos(2x)) + \cos(2x)\, d1 + \sin(2x)\, d2 + 2\sin(2x)\, x$$

$$\frac{4}{\cos(2x)} = \frac{4}{\cos(2x)}$$

$$Yzn := \cos(2x) \ln(\cos(2x)) + \cos(2x)\, d1 + \sin(2x)\, d2 + 2\sin(2x)\, x$$

$$d1 := 0$$

$$d2 := 1$$

$$Yzn = \cos(2x) \ln(\cos(2x)) + \sin(2x) + 2\sin(2x)\, x$$

Якщо диференціальне рівняння більш високого порядку (n=3, 4 …), то при реалізації методу довільних сталих бажано застосовувати не тільки прості змінні, а і змінні типу масивів: вектори, матриці, а також цикли в програмі. А самі системи лінійних рівнянь зображати у векторно-матричній формі і в такій же формі їх розв'язувати. Тоді потрібні ще додатково такі оператори Maple.

with(LinearAlgebra), with(MTM) – підключення пакетів ***LinearAlgebra*** і ***MTM*** для виконання дій з векторами і матрицями, зокрема їх диференціювання й інтегрування;

Matrix(n,n) – формування матриці заданого розміру n з нульовими елементами;

for i from 1 by 1 to n do … end do – оператор циклу з визначеною кількістю циклів;

Vector(4,[e1,e2,e3,e4]) – формує вектор з чотирьох елементів;

LinearSolve(Y,b) – розв'язування системи рівнянь з основною матрицею Y і вільним членом b.

Задача 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{(4)} - 2y^{(2)} + 1 = 8\cdot(e^{x} + e^{-x}) + 4\cdot(\sin(x) + \cos(x))$$

Розв'язування. Згідно написаного вище алгоритму 1 (метод варіації довільних сталих), можна написати й алгоритм 2 у векторно-матричній формі. Однак це не обов'язково. Можна і за алгоритмом 1 створювати програму 2. При цьому суб'єктам учіння знадобляться знання з основ лінійної алгебри і основ програмування з матрицями і векторами, що є фундаментальними знаннями з математики і інформатики і з котрими суб'єкти учіння вже знайомі, при цьому в Maple є свої особливості як і в кожній мові програмування. Саме ці особливості додатково й потрібно освоїти студентам чи магістрантам самостійно чи за допомогою викладача. Бажано викладачу на лекції після способу розв'язування і відповідного алгоритму подати студентам чи магістрантам оператори Maple, котрі будуть використовуватися при складанні програми.

Програма 2.

```
restart : with(LinearAlgebra) : with(MTM) : unassign('Y') :
n := 4 :
Y := Matrix(n, n); assign(ln(e) = 1) :
Y[1, 1] := e^x : Y[1, 2] := x·e^x :
Y[1, 3] := e^(-x) : Y[1, 4] := x·e^(-x) :'Y[1]'= Y[1];
for i from 1 by 1 to n - 1 do
Y[i + 1] := diff(Y[i], x$1) :
end do:

'Y'= Y;
b := Vector(n, [0, 0, 0, 8·(e^x + e^(-x)) + 4·(sin(x) + cos(x))]);
c := combine(simplify(LinearSolve(Y, b)));
d := Vector(n, [d1, d2, d3, d4]);
cint := simplify(int(c)) + d;
z := Vector(n); z := Vector[row](cint);
u := Vector[column](Y[1]);
zn := combine(expand(simplify(z.u)));
zn1 := simplify(diff(zn, x));
zn2 := simplify(diff(zn1, x));
zn3 := simplify(diff(zn2, x));
zn4 := simplify(diff(zn3, x));
zn4 - 2·zn2 + zn = 8·(e^x + e^(-x)) + 4·(sin(x) + cos(x));
```

$$zn := \sin(x) + \cos(x) + e^x d2\, x + e^x x^2 + e^{-x} d4\, x + e^{-x} x^2 + \frac{3}{2} e^{-x} + e^x d1 - 2 x e^x + \frac{3}{2} e^x + e^{-x} d3 + 2 x e^{-x}$$

Тема: *«Метод невизначених коефіцієнтів відшукання часткових розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами».*

Задача 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$y''' - 7 \cdot y'' + 25 \cdot y' - 39 \cdot y = e^{2x} \cdot (5 \cdot \sin(3x) + 7 \cdot \cos(3x))$$

Розв'язування. Будемо шукати загальний розв'язок неоднорідного рівняння як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і часткового розв'язку неоднорідного.

При цьому бажано виділити основні моменти відповідного алгоритму.

1. Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.
2. Відшукуємо вигляд часткового розв'язку yh неоднорідного рівняння, виходячи з виду вільного члена неоднорідного рівняння.

3. Знаходимо першу $yh1$, другу $yh2$ і третю $yh3$ похідні часткового розв'язку неоднорідного рівняння, підставляємо їх і yh в неоднорідне рівняння, прирівнявши коефіцієнти при однакових виразах, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Розв'язуємо її.
4. Записуємо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння як суму загального розв'язку однорідного рівняння і часткового розв'язку неоднорідного.

Програма 3.

\>

```
restart : unassign('λ','a','b','Y') :
y'''-7y''+25y'+25y-39 = e^(2x)·(5·sin(3x) + 7·cos(3x));
solve(λ^3 - 7λ^2 + 25λ - 39 = 0, {λ});
y1 := e^(3x); y2 := e^(2x)·cos(3x); y3 := e^(2x)·sin(3x);
yh := e^(2x)·x·(a·sin(3x) + b·cos(3x)); assign(ln(e) = 1) :
yh1 := simplify(diff(yh, x$1));
yh2 := simplify(diff(yh1, x$1));
yh3 := simplify(diff(yh2, x$1));
simplify(yh3 - 7·yh2 + 25·yh1 - 39·yh - e^(2x)·(5·sin(3x) + 7·cos(3x))) = 0;
solve({18a - 6b + 5 = 0, 18b + 6a + 7 = 0}, {a, b});
Y := c1·y1 + c2·y2 + c3·y3 + e^(2x)·x·(-11/30·sin(3x) - 4/15·cos(3x));
simplify(diff(Y, x$3) - 7·diff(Y, x$2) + 25·diff(Y, x$1) - 39·Y) = e^(2x)·(5 sin(3x)
    + 7 cos(3x));
```

$$\frac{d^3}{dx^3}y(x) - 7\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 25\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 25\,y(x) - 39 = e^{2x}(5\sin(3x) + 7\cos(3x))$$

$$Y := c1\,e^{3x} + c2\,e^{2x}\cos(3x) + c3\,e^{2x}\sin(3x) + e^{2x}x\left(-\frac{11}{30}\sin(3x) - \frac{4}{15}\cos(3x)\right)$$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$Y^{(4)} + 3Y^{(3)} + Y^{(2)} = 12x^2 - 6x$$

Розв'язування. Будемо відшукувати загальний розв'язок неоднорідного рівняння як суму загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку неоднорідного. Відповідний теоретичний матеріал студентам чи магістрантам уже відомий з лекції. Тому запис алгоритму необов'язковий. Особливо коли суб'єкти учіння вже мають певний досвід розв'язування задач в середовищі Maple. Такий досвід вони можуть набути раніше при розв'язуванні задач лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу.

У цій задачі добавляється оператор

collect(f(x),x) – виділяє вирази при різних степенях x.

Програма 4.

```
restart : with(LinearAlgebra) :
   Y'''' + 2 Y''' + Y'' = e^(0·x)·(12 x^2 − 6 x) ;
Y'''' + 2 Y'''+ Y'' = 0 ;
solve(λ^4 + 2 λ^3 + λ^2 = 0, {λ});
y := Vector(4) : c := Vector(4, [c1, c2, c3, c4]);
y[1] := e^(0·x); y[2] := x·e^(0 x); y[3] := e^(−x); y[4] := x·e^(−x); print('y'= y);
Yzo := c.y;
yn := expand(e^(0·x)·x^2·(m·x^2 + n·x + k));
ynp := Vector(4) :
for i from 1 by 1 to 4 do
ynp[i] := simplify(diff(yn, x$i)) :
end do: print('ynp'= ynp);
collect(ynp[4] + 2 ynp[3] + ynp[2], x) = 12 x^2 − 6 x;
S := solve({12 m = 12, 48 m + 6 n =−6, 24 m + 12 n + 2 k = 0}, {m, n, k});
assign(S) :
Yzn := Yzo + yn; assign(ln(e) = 1) :
Yzn''''+ 2· Yzn'''+ Yzn''= 12 x^2 − 6 x;
```

$$\frac{d^4}{dx^4} Y(x) + 2\left(\frac{d^3}{dx^3} Y(x)\right) + \frac{d^2}{dx^2} Y(x) = 12\,x^2 - 6\,x$$

$$Yzn := \overline{c1} + \overline{c2}\,x + \overline{c3}\,e^{-x} + \overline{c4}\,x\,e^{-x} + x^4 - 9\,x^3 + 42\,x^2$$

Студенти спеціальності інформатика (не педагогічна спеціальність) і математика і інформатика (педагогічна спеціальність), як показав педагогічний експеримент, досить швидко освоюють розв'язування задач у Maple-середовищі. При цьому виникають такі проблеми: *проблема* інтеграції знань диференціальних рівнянь, матаналізу, лінійної алгебри і інформатики. Адже створюється зовсім нове навчально-інформаційне середовище, коли знання з усіх названих дисциплін потрібно застосовувати в один момент, що значно складніше, ніж застосування однопредметних знань. *Другою проблемою* є недостатнє засвоєння методів розв'язування диференціальних рівнянь (методу варіації довільних сталих і методу невизначених коефіцієнтів). *Третьою проблемою* є те, що наведені вище програми універсальні в тому розумінні, що їх можна з незначними змінами застосовувати до розв'язування диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами довільного порядку, що унеможливлює просте введення даних і автоматизоване розв'язування диференціального рівняння. У супротивному – розв'язування перетворилося б у просту формальність (легку комп'ютерну гру) без належного формування знань і умінь з математики і інформатики. *Четверта проблема* пов'язана з недосконалими знаннями фундаментальних основ інформатики, що утруднює процес самостійного розширення знань студентів з Maple-технології. *П'ята проблема* пов'язана з недостатньою загальною математичною підготовкою, зокрема з лінійної алгебри, математичного аналізу тощо. *Шоста проблема* полягає в ризиках формального засвоєння математичних дисциплін при навчанні математики в умовах Maple-технології чи іншої ІКТ (ризик втрати фундаментальності математичних знань). *Сьома проблема* пов'язана з «принципом використання мінімальної кількості операторів Maple», згідно котрого програма повинна бути якомога простішою, якомога компактнішою і все, що не обов'язково програмувати включати в програму не бажано. Мінімізація програми на основі цього принципу залежить від створення варіанту алгоритму способу розв'язування задачі з передбаченням автоматизації проміжних дій у Maple-технології, по суті алгоритм способу розв'язування задачі створюється у просторі можливостей виконання узагальнених дій у Maple-технології.

Ефективність застосування запропонованої технології розв’язування диференціальних рівнянь зростає при виконанні суб’єктами учіння індивідуальних завдань під час практичних занять чи самопідготовки, а також виконанні індивідуальних проектів, курсових та дипломних робіт.

На лекції матричні способи розв’язування системи лінійних однорідних і неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами бажано подавати у вигляді алгоритмічного припису з чітким уявленням як допоміжні дії (дії, що не є смисловими твірними способу розв’язування) будуть автоматизовані в Maple-середовищі. Отже способи розв’язування диференціальних рівнянь суттєво залежать від можливостей Maple-середовища виконувати ті чи інші операції певного рівня узагальнення [4], але без втрати ідеї і відповідного наукового підходу та змісту способу розв’язування в алгоритмічному приписі реалізації способу і відповідно у програмі. Тоді на перше місце буде поставлено саме засвоєння способу розв’язування (ідеї, наукові підходи, зміст, алгоритм, програма), а не проміжні (хоч і важливі для способу розв’язування) дії.

Тема: «Розв’язування матричним методом неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь у випадку простого спектру матриці системи методом варіації довільних сталих».

Задача 5. Знайти загальний розв’язок системи диференціальних рівнянь

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{f}\ , \tag{1}$$

де, наприклад (без втрати загальності),

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}11 & \boldsymbol{m}12 & 13 \\ \boldsymbol{m}21 & \boldsymbol{m}22 & \boldsymbol{m}23 \\ \boldsymbol{m}31 & \boldsymbol{m}32 & \boldsymbol{m}33 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}1 \\ \boldsymbol{f}2 \\ \boldsymbol{f}3 \end{bmatrix}.$$

Запишемо відповідну однорідну систему

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{Y}$$

Наведемо алгоритмічний припис розв’язування задачі 5.

Алгоритм 5.

1. Знаходемо фундаментальну матрицю-розв’язок відповідної однорідної системи

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{Y} \tag{2}$$

Матриця називається фундаментальною стосовно системи (2) [6], якщо її стовбці є лінійно незалежними частковими вектор-розв’язками системи (2). У випадку системи трьох рівнянь таких векторів буде три. Фундаментальна матриця дозволяє знаходити загальний розв’язок системи (2) [6].

Для задання матриць і векторів в Maple є оператори ***Matrix(3,3,[перелік елементів по рядкам])***, ***Vector(3,[****перелік елементів вектору****])****. Для побудови фундаментальної матриці системи (2) потрібні власні значення і власні вектори матриці M [6], Для цього у Maple є оператор* $\boldsymbol{\lambda, E := \mathrm{Eigenvectors}(M)}$. *Для виконання дій з матрицями і векторами потрібно приєднати пакет з лінійної алгебри* ***with(LinearAlgebra)***

2. Знаходимо власні значення і власні вектори матриці M. Власні значення позначимо через $\lambda 1, \lambda 2, \lambda 3$, а матрицю, стовбці котрої є відповідними власними векторами позначимо через E. Позначимо через Λ таку діагональну матрицю

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^{\lambda 1 \cdot \boldsymbol{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{e}^{\lambda 2 \cdot \boldsymbol{x}} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{e}^{\lambda 3 \cdot \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Для операцій з матрицями і векторами потрібно приєднати пакет з лінійної алгебри ***with(LinearAlgebra)***

3. Тоді фундаментальну матрицю системи (2) можна записати так

$$\boldsymbol{Yfund} = \boldsymbol{E} \cdot \Lambda \qquad (4)$$

Множення матриць відбувається в пакеті ***LinearAlgebra.***

4. Знаходимо вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c(t)}$

$$\boldsymbol{c} = \int \boldsymbol{Yfund}^{-1} \cdot \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dt} + \boldsymbol{d}, \text{ де} \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}1 \\ \boldsymbol{d}2 \\ \boldsymbol{d}3 \end{bmatrix}.$$

Операція інтегрування (невизначений інтеграл) виконується оператором ***int(f(x),x).*** *Інтегрування і диференціювання векторів-функцій і матриць-функцій виконується тим же оператором тільки в пакеті* ***MTM.*** *Тому його потрібно приєднати* ***with(MTM).***

Обґрунтуємо рівність (5). Дійсно, виходячи з (4), загальний розв'язок системи (1) запишеться так

$\boldsymbol{Yzo} = \boldsymbol{Yfund} \cdot \boldsymbol{c}$, де вектор c – const [6]. Будемо вважати, що $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c(t)}$ (метод варіації довільних сталих). Загальний розв'язок системи (1) матиме вигляд

$$\boldsymbol{Yzn} = \boldsymbol{Yfund} \cdot \boldsymbol{c(t)} \qquad (6)$$

Підставимо (6) в систему (1), маємо після елементарних перетворень

$$\boldsymbol{(Yfund' - M \cdot Yfund) \cdot c(t) + Yfund \cdot c'(t) = f}$$

Оскільки, вираз $\boldsymbol{(Yfund' - M \cdot Yfund)} = 0$ згідно (2), то маємо

$$\boldsymbol{Yfund \cdot c'(t) = f}$$

Звідки одержуємо

$$\boldsymbol{c'(t) = Yfund^{-1} \cdot f}$$

З останньої рівності випливає (5).

Множення матриці на вектор виконується в пакеті ***LinearAlgebra.*** *Відшукання оберненої матриці U виконується оператором* ***MatrixInverse(U)*** *в тому ж пакеті.*

5. Знаходимо загальний розв'язок неоднорідної системи (1) чи (2)

$$\boldsymbol{Yzn} = \boldsymbol{Yfund}^{-1} \cdot \boldsymbol{c(t)} \qquad (7)$$

Відшукання оберненої матриці до матриці U виконується оператором ***MatrixInverse(U)*** *і виконується в пакеті* ***LinearAlgebra.***

6. Розв'язок (7) у скалярній формі буде мати вигляд

$$\boldsymbol{x = Yzn[1],\ y = Yzn[2],\ z = Yzn[3]}\,, \tag{8}$$

Де $\boldsymbol{Yzn[i],\ i = 1,2,3}$ елементи вектора $\boldsymbol{Yzn}$.

Один раз ми надали детальний опис операторів у Maple (в пунктах алгоритму відповідний текст у курсиві), котрі реалізують узагальнені дії алгоритму способу розв'язування диференціального рівняння, що дає змогу читачеві побачити органічний зв'язок створення власного варіанту способу розв'язування задачі і відповідного алгоритму з операторами Maple для автоматизації виконання проміжних дій.

Найбільш затратними діями в алгоритмі 5 є відшукання власних значень і власних векторів матриці М, відшукання обернених матриць, множення матриць чи матриці на вектор, диференціювання складного векторного чи матричного виразу, інтегрування векторного чи матричного виразу, спрощення складних виразів. Названі дії відомі суб'єктам учіння і після короткого повторення відповідні знання в студентів чи магістрантів відновлюються. Саме ці дії можна вважати проміжними або технічними (операції) і спробувати автоматизувати їх в ІКТ-середовищі, у нас у Maple-середовищі, що і робиться в цій статті.

<u>Програма 5.</u>

$restart : with(LinearAlgebra) : unassign(M) :$

$\frac{dx}{dt} = 4 \cdot x + y + z + e^{2\,t};\ \frac{dy}{dt} = -2\,x + 2\,y - z - \cos(t);\ \frac{dz}{dt} = -12\,x + y - 4\,z + t;$

$\frac{dY}{dt} = M \cdot Y + f;$

$M := Matrix(3, 3, [[4, 1, 1], [-2, 2, -1], [-12, 1, -4]]);$

$f := Vector\left(3, \left[-e^{2\,t}, -\cos(t), -t\right]\right);$

$\lambda, E := Eigenvectors(M);$

$\Lambda := Matrix\left(3, \left[\left[e^{\lambda[1]\cdot t}, 0, 0\right], \left[0, e^{\lambda[2]\cdot t}, 0\right], \left[0, 0, e^{\lambda[3]\cdot t}\right]\right]\right);$

$Yfund := E.\Lambda;$

$assign(\ln(e) = 1) :$

$with(MTM) :$

$d := Vector(3, [d1, d2, d3]);$

$c := simplify(int(MatrixInverse(Yfund).f, t)) + d;$

$Yzn := simplify(Yfund.c);$

$x := Yzn[1]; y := Yzn[2]; z := Yzn[3];$

'*Перевірка*';

$combine(expand(simplify(diff(Yzn, t\$1)))) = combine(simplify(M.Yzn + f));$

$$\frac{dx}{dt} = 4\,x + y + z + e^{2\,t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\,x + 2\,y - z - \cos(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = -12\,x + y - 4\,z + t$$

$$\frac{dY}{dt} = M\,Y + f$$

$$Yzn := \left[\left[-\frac{1}{3}\,t\,e^{2t} + \frac{7}{10}\sin(t) - \frac{9}{10}\cos(t) + \frac{3}{2}\,t - \frac{14}{9}\,e^{2t} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5}\,e^{t}\,d1 - \frac{1}{2}\,e^{2t}\,d2 - \frac{4}{17}\,e^{-t}\,d3\right],\right.$$
$$\left[-\frac{1}{2}\sin(t) + \cos(t) - t + \frac{2}{3}\,e^{2t} + \frac{1}{5}\,e^{t}\,d1 + \frac{3}{17}\,e^{-t}\,d3\right],$$
$$\left.\left[\frac{2}{3}\,t\,e^{2t} - \frac{7}{5}\sin(t) + \frac{33}{10}\cos(t) - 5\,t + \frac{28}{9}\,e^{2t} + \frac{1}{2} + e^{t}\,d1 + e^{2t}\,d2 + e^{-t}\,d3\right]\right]$$

$$x := -\frac{1}{3}\,t\,e^{2t} + \frac{7}{10}\sin(t) - \frac{9}{10}\cos(t) + \frac{3}{2}\,t - \frac{14}{9}\,e^{2t} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5}\,e^{t}\,d1 - \frac{1}{2}\,e^{2t}\,d2 - \frac{4}{17}\,e^{-t}\,d3$$

$$y := -\frac{1}{2}\sin(t) + \cos(t) - t + \frac{2}{3}\,e^{2t} + \frac{1}{5}\,e^{t}\,d1 + \frac{3}{17}\,e^{-t}\,d3$$

$$z := \frac{2}{3}\,t\,e^{2t} - \frac{7}{5}\sin(t) + \frac{33}{10}\cos(t) - 5\,t + \frac{28}{9}\,e^{2t} + \frac{1}{2} + e^{t}\,d1 + e^{2t}\,d2 + e^{-t}\,d3$$

Задача 6. Розв'язати систему неоднорідних диференціальних рівнянь у випадку, коли матриця системи має одне власне значення, котрому відповідає одна клітина Жордана.

Розв'язування. Як відомо [3, 5], якщо матриця M має одне власне значення λ, то її можна представити у вигляді

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}$$

Тоді система (1) набуде вигляду

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{f}\text{ , де} \tag{2}$$

$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$ клітина Жордана, λ – характеристичне число матриці M.

Помножимо систему (2) зліва на матрицю $\boldsymbol{Q}^{-1}$, одержимо систему

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{f} \tag{3}$$

Позначимо $\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{f} = \boldsymbol{S}$. Тоді система (3) набуде вигляду

$$\boldsymbol{Z}' = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{S} \tag{4}$$

Звідси видно, що система (4) складається з трьох скалярних лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}3' = \lambda\cdot\boldsymbol{z}3 + \boldsymbol{s}[3] \\ \boldsymbol{z}2' = \lambda\cdot\boldsymbol{z}2 + \boldsymbol{z}3 + +\boldsymbol{s}[2] \\ \boldsymbol{z}1' = \lambda\cdot\boldsymbol{z}1 + \boldsymbol{z}2 + \boldsymbol{s}[1] \end{cases}. \tag{5}$$

Система диференціальних рівнянь (5) розв'язується послідовно «зверху-вниз» як скалярні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку. Оскільки спосіб підстановки і відповідний алгоритм розв'язування таких рівнянь простий і відомий суб'єктам учіння, то їх доцільно автоматизувати.

Розв'язуючи лінійні рівняння першого порядку (5), отримаємо компоненти вектор-розв'язку Z системи (4). Аналогічний алгоритм розв'язування буде при будь-якому розмірі системи (1).

Алгоритм 6 згідно попереднього загального алгоритму може бути таким.

1. Визначення Жорданової форми J матриці M.
2. Визначення матриці Q у зображенні матриці M.
3. Визначення векторів Z і S.
4. Послідовне розв'язування рівнянь системи (5).
5. Запис загальний розв'язок системи (5) у векторній формі..
6. Запис загального розв'язку системи (1) $\boldsymbol{Yzy} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Z}$.
7. Здійснення перевірки.

Для ***прикладу*** розв'яжемо систему диференціальних рівнянь

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{f} \ ,$$

де $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^{3\cdot x} \\ \boldsymbol{cos(}5\cdot\boldsymbol{x)} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix}$.

Новими операторами Maple будуть такі.

Eigenvectors (M) – знаходить вектор власних значень і матрицю, стовбцями котрої будуть власні вектори матриці системи M.

JordanForm(M) – приводить матрицю M до жорданової форми [3].

JordanForm(M,output – 'Q') – виводить на монітор матрицю Q, що дозволяє записати матрицю у вигляді $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}$.

MatrixInverse(Q) – повертає обернену до Q матрицю $\boldsymbol{Q}^{-1}$.

dsolve(…) – повертає розв'язок диференціального рівняння.

```
restart : with(LinearAlgebra) :
M := Matrix(3, 3, [[2,-1, 1], [-2, 2,-1], [-4,-2, 2]]);
f := Vector(3, [e^(3 x), cos(5 x), 0]);
h, E := Eigenvectors(M);
J := JordanForm(M);
Q := JordanForm(M, output = 'Q');
Q1 := MatrixInverse(Q); Q.Q1;
MatrixInverse(Q).M.Q;
s := Q1.f;
assign(ln(e) = 1);
p1 := dsolve(D(r3)(x) = h[3]·r3(x) + s[3], r3(x)); assign(p1);
p2 := dsolve(D(r2)(x) = h[2]·r2(x) + r3(x) + s[2], r2(x)); assign(p2);
p3 := dsolve(D(r1)(x) = h[1]·r1(x) + r2(x) + s[1], r1(x)); assign(p3);
p := Vector(3, [r1(x), r2(x), r3(x)]);
Yzn := combine(simplify(Q.p));
'Перевірка'; with(MTM) :
combine(simplify(Yzn')) = combine(simplify(M.Yzn + f));
```

$$Yzn(x) := \left[\left[-e^{2x}\_C1\,x^2 + \frac{325}{24389}\cos(5x) + \frac{710}{24389}\sin(5x) - e^{3x} - 2e^{2x}\_C2\,x - 2e^{2x}\_C3 + e^{2x}\_C1\right],\right.$$
$$\left[2e^{2x}\_C1\,x^2 - \frac{1114}{24389}\cos(5x) + \frac{3945}{24389}\sin(5x) + 2e^{3x} + 4e^{2x}\_C2\,x + 4e^{2x}\_C3 - 2e^{2x}\_C1\,x - 2e^{2x}\_C2\right],$$
$$\left.\left[2e^{2x}\_C1\,x^2 + \frac{1786}{24389}\cos(5x) + \frac{900}{24389}\sin(5x) + 4e^{2x}\_C2\,x + 4e^{2x}\_C3 - 4e^{2x}\_C1\,x - 4e^{2x}\_C2\right]\right]$$

Навчальна ситуація бінарних занять у нашому тлумаченні розгортається одночасно в двох аспектах – диференціальних рівнянь і Maple-технології. Тому орієнтовна основа учіння [9] суб'єктів учіння значно відрізняється від навчання в традиційному розумінні, коли вивчаються дисципліни окремо одна від одної. У бінарних заняттях формуються інтегративні знання, котрі є більш складними знаннями порівняно з однопредметними знаннями. Складність у тому, що потрібно органічно поєднати подачу теоретичного матеріалу щодо способів розв'язування диференціальних рівнянь з урахуванням можливостей Maple-технології. Точніше – алгоритмічні приписи способів розв'язування (метод варіації довільних сталих, метод невизначених коефіцієнтів, матричні способи розв'язування систем диференційних рівнянь, метод зведення системи рівнянь до одного рівняння) потрібно створювати, виходячи з можливостей виконання дій у Maple-технології, тобто з можливостей автоматизації технічних дій, але із збереженням виконання смислово-твірних дій методів (способів) розв'язування диференціальних рівнянь.

Наведемо загальну схему лекційних та практичних занять за поданою вище технологією.

1. Лектор подає студентам теоретичний матеріал про спосіб чи метод розв'язування диференціальних рівнянь у вигляді алгоритмічного припису по пунктам.
2. У кожному пункті наводяться дії певного рівня узагальнення, котрі потрібно буде автоматизувати у Maple-технології.
3. Укожному пункті наводяться оператори Maple-технології, котрі автоматизують визначені дії, наводяться і відповідні пакети, в котрих знаходяться потрібні оператори.
4. Наводиться розв'язування в Maple-технології прикладу відповідно алгоритмічному припису.

Практичні заняття проводяться в комп'ютерних класах з достатньою кількістю комп'ютерів. Якщо комп'ютер один на двох студентів, то ефективність заняття зменшується.

В університетській хмарці знаходяться тексти лекцій, методичні рекомендації до кожного практичного заняття з прикладами розв'язування диференціальних рівнянь у Maple-технології, індивідуальні завдання для студентів на практичних заняттях, самостійного опрацювання дома, теми індивідуальних проектів чи системи задач, котрі студентам необхідно здати на перевірку (індивідуальна робота), критерії оцінювання роботи студентів. Індивідуальні завдання різні, але класифіковані за типами. У хмарці знаходяться і методичні розробки щодо необхідних знань з математичного аналізу і лінійної алгебри. Адже у студентів може вже й не бути під рукою конспектів чи літератури.

Кожний студент працює індивідуально, викладач допомагає і контролює роботу студентів (зона ближнього розвитку за Л.С.Виготським). У кінці заняття викладач кожному студенту виставляє оцінку (індивідуальне оцінювання). Студент має змогу виконати усі аудиторні завдання і частину домашніх, що забезпечує індивідуальність навчання і навчання за різними темпами.

Консультації по домашнім та індивідуальним завданням можна проводити дистанційно через форуми, чати, скайпи.

На екзамен чи залік виносяться питання: диференціальних рівнянь; Maple-технології, котрі відображають «зону використання» Maple-технології; математики із «зони використання» (питання математичного аналізу, лінійної алгебри); особливості технології створення бінарних занять з диференціальних рівнянь і Maple-технології.

Оцінки можна виставляти, наприклад, за такі види і форми навчальної діяльності: 1) за практичні заняття; 2) за домашні завдання (періодично); 3) за індивідуальні завдання; 4) за індивідуальні проекти (тим, хто їх виконував); 5) за участь в підготовці і проведенні занять (для тих хто приймав участь) – підготовка до лекцій різних презентацій, пошук і підбір задач практичного спрямування, котрі приводять до диференціальних рівнянь, допомога в упорядкуванні методичних матеріалів в університетській хмарці тощо.

Індивідуальну роботу студенти можуть також виконувати за бажанням, наприклад, ті, що бажають здати екзамен на чотири чи п'ять.

Результати педагогічного експерименту показують, що з набуттям студентами чи магістрантами досвіду щодо оволодіння наведеною технологією на заняттях з диференціальних рівнянь та інших навчальних дисциплін з оволодінням Maple-технологією студенти все менше виводять на «друк» проміжних результатів, все більшу кількість операторів включають у групу, результати роботи котрої виводять на екран монітора. Отже, текст «програма-результати» стає все більш компактним, що також є одним з показників оволодіння бінарною технологією.

Наведена бінарна технологія уможливлює суб'єктам учіння створювати індивідуальну траєкторію навчання, навчатися за різними темпами (темпоральність), брати додаткову роботу у вигляді індивідуальних проектів, презентацій, участі в підготовці матеріалів до лекції тощо.

Для більш детального знайомства з проблематикою статті рекомендуємо джерела [1 –10].

Стаття буде корисною викладачам математики й інформатики, студентам, магістрантам, аспірантам ВНЗ, науковцям тих же спеціальностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аладьев В.З. Основы программирования в Maple. – Таллин, 2006. – 301 с.
2. Биков В.Ю. Моделі організаційних систем відкритої освіти. – К.: «Атака». – 2009. –684 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
4. Кушнір В.А. Моделі навчальних ситуацій у світлі сучасної освіти // Математика в сучасній школі. – 2013. –№ 2. – С. 31 – 36.
5. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Изд. физико-математической литературы, 1979. – 400 с.
6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
7. Морзе Н. В. Система методичної підготовки майбутніх вчителів інформатики в педагогічних університетах : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Морзе Н. В. ; Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2003. – 605 с.
8. Семеріков С.О. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі: Монографія / Науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М.І. Жалдак. – Кривий Ріг: Мінерал; К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – 340 с.: іл. – Бібліогр.: с. 284–339.
9. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.: Издательство Московского университета. – 1975. – 344 с.
10. Maple Programming Guide / [L. Bernardin, P.Chin, P.DeMarco, R.O.Geddes, D.E.G,Hare, K.M.Heal, G.Labahn, J.P.May, J.McCarron, M.B.Monagan, D.Ohachi, and S.M.Vorkortter]. – Prindet Canada: Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc., 2011. – 703 p.

Стаття надійшла до редакції 10.10.15

Vasyl Kushnir

Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko State Pedagogical University, Kirovohrad, Ukraine

BINERY TECHNOLOGY IN DIFFERENTIAL EQUATION AND COMPUTER SCIENCE STUDY AT THE UNIVERSITIES BASED ON MAPLE-ENVIRONMENT

The problems of training basics of binary technology creation while teaching differential equations and information-communication technology (ICT) based on the Maple-technology are researched. The relevance of the study is resulted from the basic contradiction between the latest opportunities of modern ICT, in particular Maple-technology and traditional methods of teaching mathematical disciplines, including differential equations. It is not enough only occasional

applications of Maple-technology while conducting the lessons of mathematics. Maple-technology opportunities allow to teach such differential equations by means of ICT. Thus it is necessary to solve the problem of the organic connection of traditional methods for solving differential equations and possibilities of Maple-technology regarding to the solving the generalization of high level.

These actions include the simplification of the expression, solution of algebraic equations and systems, determining of eigenvalues and eigenvectors of matrices, differentiation and integration of scalar functions, vector functions and matrix functions, multiplication of matrix and matrix-vectors, the finding of the inverse matrix, etc. Binary classes are designed to teach mathematics and Computer science at the same time. Therefore, the creation of binary training technology is rather complicated problem. First of all, the teacher needs to develop an algorithm for determining the method for solving differential equations or systems of differential equations.

This algorithm must consist of activities that can be automated in Maple-technology. Such actions are of a technical nature and do not have meaning-forming actions of a method of solving problems. Then efforts and attention to the subjects of the teaching will be directed to a method of solving the problem, the establishment of an appropriate algorithm and program in Maple-technology.

The creation and set-up of the program algorithm, is carried out simultaneously. After writing one or more operators you can run them and get the interim results. This will give the opportunity to set-up one or more operators, and see the result of their performance and immediately implement corrections in the right direction.

Lectures can be carried out in such sequence. At first light the theoretical method for solving differential equations. It’s better to do it on the item at the same time creating an appropriate algorithm. In the basis of the algorithm creation the way of solving the equations should be put, and the actions which should be automated in the Maple-technology. The algorithm consists of a sequence of such actions execution.

Examples of different solutions of differential equations in Maple-technology are given.

Keywords: differential equation, methods for solving differential equations, Maple-technology, binary lesson, algorithm, software, technical actions.

Кушнир В.А.

Кировоградский государственный педагогический университет им. В. Винниченко, Кировоград, Украина

ТЕХНОЛОГИЯ БИНАРНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ИНФОРМАТИКЕ В ВУЗАХ НА ОСНОВЕ MAPLE-СРЕДЫ

Исследуются проблемы методических основ создания технологии бинарных занятий с дифференциальных уравнений и информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) на основе Maple-технологии. Актуальность исследования следует из основного противоречия между новейшими возможностями современных ИКТ, в частности Maple-технологии, и традиционными методами обучения математических дисциплин, в том числе и дифференциальных уравнений. Сегодня уже недостаточно только эпизодических применений Maple-технологии при проведении занятий по математике. Возможности Maple-технологии такие, что обучение дифференциальным уравнениям можно проводить непосредственно в Maple-технологии. При этом нужно решать проблему органического соединения традиционных способов решения дифференциальных уравнений и возможностей Maple-технологии относительно выполнения действий высокой степени обобщения.

К таким действиям относятся упрощение выражений, решение алгебраических уравнений и систем, определение собственных значений и собственных векторов матриц, дифференцирование и интегрирование скалярных функций, вектор-функций и матриц-функций, умножение матриц и матрицы на вектор, определение обратной матрицы и т.п. Бинарные занятия призваны обучать математике и информатике одновременно. Поэтому

создание технологии проведения бинарных занятий достаточно сложная проблема. Прежде всего, преподавателю нужно разработать алгоритм определенного способа решения дифференциальных уравнений или системы дифференциальных уравнений.

При этом алгоритм должен состоять из действий, которые можно автоматизировать в Maple-технологии. Такие действия имеют технический характер и не являются смыслообразующими действиями способа решения задачи. Тогда усилия и внимание субъектов учения будут направлены на способ решения задачи, создание соответствующего алгоритма и программы в Maple-технологии.

Создание и отладка программы соответственно алгоритму осуществляется одновременно. Можно после написания одного или нескольких операторов сразу запускать их и получить промежуточные результаты. Это даст возможность одновременно отладить один или несколько операторов и увидеть результат их выполнения и сразу осуществить коррекцию в нужном направлении.

Лекционные занятия можно проводить в такой последовательности. Сначала теоретически осветить способ решения дифференциальных уравнений. Лучше это сделать по пунктам, создавая одновременно и соответствующий алгоритм. При этом в основу создания алгоритма нужно положить и сам способ решения уравнений и действия, которые будут автоматизированные в Maple-технологии. Алгоритм и состоит из последовательности выполнения именно таких действий.

Приводятся примеры решения различных дифференциальных уравнений в Maple-технологии.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, способы решения дифференциальных уравнений, Maple-технология, бинарное занятие, алгоритм, программа, технические действия.