УДК 511.72

Котова О. В., Круглик В.С.
Херсонський державний університет, Херсон, Україна

ІТЕРАЦІЙНІ АЛГОРИТМИ ЗНАХОДЖЕННЯ ЧИСЕЛ З ФІКСОВАНИМИ ЧАСТОТАМИ ЇХ СИМВОЛІВ

DOI: 10.14308/ite000535

Кожна система числення має свій алфавіт, який використовується для символічного зображення числа. Історично першою системою зображення дійсних чисел була s-адична система числення (1<s∈N). Вона має просту геометрію і сьогодні залишається найбільш поширеною і широковживаною. Ця система використовує алфавіт {0,1,...,s-1}=A і має нульову надлишковість. Кожне ірраціональне число є s-адично ірраціональним. Для теорії s-адично ірраціональних чисел природним є поняття частоти цифри в зображенні числа.

Запропоновано алгоритми побудови континуальної множини ірраціональних коренів рівняння $\nu_i^s(x)=x$ *та континуальної множини дійсних чисел, дробова частина яких має наперед задану, зокрема ірраціональну, частоту символа «i» в s-адичному зображенні числа x. Функція частоти цифри* $\nu_i^s(x)$ *має непрості властивості. Вона є всюди розривною. В залежності від числа x частота* $\nu_i^s(x)$ *може не існувати і може існувати та набувати різних значень. Множиною значень функції* $\nu_i^s(x)$ *є відрізок [0,1]. Запропоновані в роботі алгоритми дозволяють знаходити інваріантні точки функції* $\nu_i^s(x)$ *з будь-якою наперед заданою точністю та будувати континуальну множину чисел з наперед заданою частотою.*

Показано використання даних алгоритмів для проведення факультативних занять на фізико-математичних факультетах.

Ключові слова: *s-адичне зображення, частота символа «i» в s-адичному зображенні числа x, нормальне число, ітераційний алгоритм, програма, факультатив.*

Кожна система числення має свій алфавіт, який використовується для символічного зображення числа. Історично першою системою зображення дійсних чисел була *s*-адична система числення ($1<s\in N$). Вона має просту геометрію і сьогодні залишається найбільш поширеною і широковживаною. Ця система використовує алфавіт $\{0,1,...,s-1\}=A$ і має нульову надлишковість, тобто існує лише злічення множина чисел, які мають два *s*-адичні зображення ($\Delta^s_{\gamma_1(x)...\gamma_k(x)...}=\gamma_1/s+...+\gamma_k/s^k+...,\ \gamma_k\in A$), їх називають *s-адично раціональними* (їх зображення має періоді (0) або(s-1)), а всі інші мають єдине зображення, їх називають *s-адично ірраціональними*. Кожне *s*-адично раціональне число є раціональним, але не кожне раціональне є *s*-адично раціональним. Кожне ірраціональне число є *s*-адично ірраціональним. Для теорії *s*-адично ірраціональних чисел природним є поняття частоти цифри в зображенні числа, тобто значення границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_i(x,n)}{n}\equiv \nu_i^s(x),$$

де $i\in A$, $x\in[0,1]$, $N_i(x,n)=\#\{k:\alpha_k(x)=i,k\le n\}$ – кількість цифр «i» в зображенні числа x серед перших n цифр.

Поняття частоти цифр зображення дійсного числа в s-адичному розкладі є продуктивним у різних відношеннях. В термінах частоти формулюються нормальні властивості чисел, формально просто задаються фрактали тощо. Функція частоти цифри

$\nu_i^s(x)$ має непрості властивості. По-перше, вона є всюди розривною, оскільки існування частоти цифри "i" в зображенні x не залежить від будь-якої скінченої кількості перших цифр цього числа і легко побудувати приклад числа, яке не має частоти цифри "i":

$$\Delta^s_{\underbrace{0i00ii0\ldots}_{n}\underbrace{\ldots0\ldots}_{n}\underbrace{0i\ldots i}_{n}\ldots}.$$

По-друге, множина значень функції $\nu_i^s(x)$ є відрізком $[0;1]$.

Зрозуміло, що в залежності від числа x частота $\nu_i(x)$ може не існувати і може існувати та набувати різних значень.

Можна навести приклад числа, у якого:

1. Існують частоти всіх цифр [7];
2. Не існує частоти принаймні однієї цифри [6, 7];
3. Жодна цифра не має частоти [6].

Легко бачити, що існування і значення функції $\nu_i(x)$ не залежить від довільної скінченої кількості перших цифр x [5].

Функцію частоти цифр використовували в своїх дослідженнях Борель Е., Лебег А., Постніков О., Серпінський В., Працьовитий М., Торбін Г. [5, 6, 7]. та інші.

Функція частоти цифри відносно часто фігурує в наукових дослідженнях останніх років, зокрема при вивченні фрактальних множин, сингулярних функцій та мір, розподілів ймовірностей, зосереджених на нуль-множинах Лебега.

Постановка задачі. Сьогодні відомо, що множина чисел, для яких частота принаймні однієї цифри не існує, є суперфрактальною. Більше того, суперфрактальною є і множина чисел, що не мають частоти жодної цифри [7]. Разом з цим, властивості функції частоти цифри числа досліджені ще недостатньо, а актуальність їх вивчення неодноразово підкреслювалася [6].

Число $x \in [0;1]$ називається *нормальним за основою s* (слабо нормальним), якщо для кожного $i \in \{0,1,\ldots,s-1\}$ частота існує і рівна $\nu_i(x) = s^{-1}$.

Число $x \in [0;1]$, яке є нормальним за кожною натуральною основою $s \geq 2$, називається *нормальним*, тобто

$$x - \text{нормальне} \Leftrightarrow \forall s:\ \nu_i(x) = s^{-1},\ i = \overline{0, s-1}\ [6].$$

Відома теорема Бореля стверджує, що майже всі числа в відрізка [0;1] є нормальними, тобто міра Лебега множини нормальних чисел з [0;1] дорівнює 1. Тобто виявляється, властивість нормальності, на відміну від слабої нормальності, характеризує дане число як таке, а не відносно тієї чи іншої системи числення, що виражає деяку абсолютну арифметичну властивість дійсного числа.

Не зважаючи на те, що майже всі дійсні числа нормальні, навести приклад (побудувати) конкретне нормальне число не так просто. Необхідно відмітити, що Еміль Борель, який першим на основі теорії міри встановив існування цих чисел, назвавши їх абсолютно нормальними повідомив, що йому не вдалось побудувати жодного прикладу нормального числа [6]. Вперше це зробив А. Лебег. Пізніше були створені цілі теорії, підпорядковані цій задачі.

Число $x \in [0;1]$ називається *анормальним за основою s*, якщо воно не має частоти принаймні однієї *s*-адичної цифри.

Так, наприклад, розглянемо число x, яке в трійковій системі числення має наступний символічний запис $x = \Delta_{01200112000011112\ldots}$ Тобто кожна наступна серія нулів має довжину, вдвічі більшу попередньої, серія одиниць, що йде за нею, має таку ж довжину, між новою серією 0 і попередньою серією 1 міститься одна цифра 2. Частоти цифр 0 і 1 не існують, тоді коли частота 2, очевидно, рівна 0. Таким чином, x – анормальне число за основою 3.

Розглянемо в системі числення з основою 2 число

$$x=\Delta^2_{\underbrace{010011000000111111...}_{m}\underbrace{0...0}_{m}\underbrace{1...1}_{m}\cdot}$$

Число x не має ні частоти 0, ні частоти 1.

Число $x\in[0;1]$ називається *антинормальним* за основою s, якщо частоти у нього існують, але не рівні між собою.

Число $x=\Delta^3_{020202...}$ не є нормальним за основою 3, оскільки

$$v_0(x)=v_2(x)=\frac{1}{2}\neq v_1(x)=0.$$

Числа які не є нормальними (мають «ненормальні» частотні характеристики) важко піддаються дослідженню. У метричних питаннях ігнорують нуль-множинами, розмірність Хаусдорфа-Безиковича яких дорівнює 0. Отже, якщо б вдалося довести, що множина таких чисел є аномально фрактальною, то нею можна було б ігнорувати і при дослідженні фракталів. Але ситуація виявилась діаметрально протилежною. Множина чисел, що не є нормальними, – суперфрактальна множина. Отже, при дослідженні фракталів такою множиною ігнорувати не слід.

Торбін Г.М. довів, що множина M анормальних чисел відрізка [0;1] є суперфрактальною множиною, тобто міра Лебега цієї множини дорівнює 0, а її розмірність Хусдорфа-Безиковича рівна 1.

Множина *A* антинормальних чисел відрізка [0;1] є:

1) всюди щільною; 2) всюди розривною; 3) континуальною.

Множина *A* антинормальних чисел відрізка [0;1] є суперфрактальною множиною.

Алгоритм побудови континуальної множини ірраціональних коренів рівняння $v_i^s(x)=x$

Ми через побудову послідовності цифр з алфавіту А, вкажемо збіжну послідовність s-адично раціональних точок

$$x_m=\frac{\gamma_1}{s}+\frac{\gamma_2}{s^2}+...+\frac{\gamma_{p_m}}{s^{p_m}}, \text{ де } p_1=1,\ \ p_n=s^{p_{n-1}}.$$

Тоді число $x=\lim\limits_{m\to\infty}x_m$ *є шуканим коренем рівняння* $v_1^s(x)=x$.

$$x_1=\frac{\varepsilon_1}{s}\equiv\Delta^s_{\varepsilon_1}, \text{ де}$$

$$\varepsilon_1\in A.$$

$$x_2=\frac{\gamma_1}{s}+\frac{\gamma_2}{s^2}+...+\frac{\gamma_{p_2}}{s^{p_2}}\equiv\Delta^s_{\varepsilon_1\beta_{11}\beta_{21}...\beta_{e_11}\varepsilon_2}, \text{ де}$$

$$p_2=s^{p_1}=s,$$

$$e_1=p_2-p_1-1=s-2,$$

$$\beta_{11}=[(p_1+1)x_1]-[p_1x_1]=[2x_1]-[x_1],$$

$$\beta_{21}=[(p_1+2)x_1]-[(p_1+1)x_1]=[3x_1]-[2x_1],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\beta_{e_11}=[(p_1+e_1)x_1]-[(p_1+e_1-1)x_1],$$

$$\varepsilon_2\in A.$$

Аналогічно визначаються числа x_3, x_3 *і т.д.*

Якщо число $x_m = \frac{\gamma_1}{s} + \frac{\gamma_2}{s^2} + \ldots + \frac{\gamma_{p_m}}{s^{p_m}}$ *вже побудовано, то наступний член послідовності знаходимо наступним чином.*

$$x_{m+1} \equiv \Delta^s_{\gamma_1 \ldots \gamma_{p_m} \beta_{1m} \beta_{2m} \ldots \beta_{e_m m} \varepsilon_{m+1}} \text{, де}$$

$$p_{m+1} = s^{p_m},$$

$$e_m = p_{m+1} - p_m - 1,$$

$$\beta_{1m} = \left[\left(p_m + 1\right) x_m\right] - \left[p_m x_m\right],$$

$$\beta_{2m} = \left[\left(p_m + 2\right) x_m\right] - \left[(p_m + 1) x_m\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_{e_m 1} = \left[\left(p_m + e_m\right) x_m\right] - \left[(p_m + e_m - 1) x_m\right],$$

$$\varepsilon_{m+1} \in A.$$

І т.д.

Оскільки $r = \left[\left(k+1\right)x\right] - \left[kx\right] \in \{0,1\}$, то кількість одиниць в *s*-адичному розкладі числа x_{m+1} дорівнює

$$N_1(x_{m+1}) = N_1(x_m) + \sum_{j=1}^{e_m} \beta_{jm} + \varepsilon_{m+1}.$$

Не складно довести, що при $m \to \infty$ $\frac{N_1(x_{m+1})}{p_{m+1}} \to \nu_1^s(x).$

І границя

$$\lim_{m\to\infty} \frac{N_1(x_{m+1})}{p_{m+1}} = \nu_1^s(x) = x.$$

існує.

В роботах [3б 4] вивчається питання про існування та потужність множини розв'язків рівняння $\nu_1^3(x) = x.$ Доводиться існування одного раціонального кореня та континуальної множини трійково-ірраціональних розв'язків вказаного рівняння.

Наслідок 1. Поклавши в запропонований алгоритм $\beta'_{qj} = \beta_{qj} \cdot i$, отримаємо корені рівняння $\nu_i^s(x) = x.$

Алгоритм побудови континуальної множини дійсних чисел, дробова частина яких має наперед задану, зокрема ірраціональну, частоту символа «і» в s-адичному зображенні

Нехай $\{\varepsilon_n\}$ – задана нескінченна послідовність нулів та одиниць.

Розглянемо число

$$x = \Delta^s_{\underbrace{\underbrace{\underbrace{0\,0}_{p_1}\varepsilon_1 \beta_{11}\beta_{21}\ldots\beta_{e_1 1}}_{p_2}\varepsilon_2 \ldots \beta_{1k}\beta_{2k}\ldots\beta_{e_1 k}}_{p_k}\varepsilon_{k+1}\ldots},$$

визначене числами e_i, p_i, $\varepsilon_i\left(i=\overline{1,\infty}\right)$ і $\beta_{ij}\left(j=\overline{1,\infty}, i=\overline{1,e_j}\right)$:

$$\beta_{11}=\left[\left(p_1+1\right)q\right]-\left[p_1 q\right]=\left[4q\right]-\left[3q\right],$$
$$\beta_{21}=\left[\left(p_1+2\right)q\right]-\left[\left(p_1+1\right)q\right]=\left[5q\right]-\left[4q\right],$$
$$\beta_{31}=\left[\left(p_1+3\right)q\right]-\left[\left(p_1+2\right)q\right]=\left[6q\right]-\left[5q\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\beta_{1k}=\left[\left(p_k+1\right)q\right]-\left[p_k q\right],$$
$$\beta_{2k}=\left[\left(p_k+2\right)q\right]-\left[\left(p_k+1\right)q\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\beta_{jk}=\left[\left(p_k+j\right)q\right]-\left[\left(p_k+j-1\right)q\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\beta_{e_k k}=\left[\left(p_k+e_k\right)q\right]-\left[\left(p_k+e_k-1\right)q\right]=\left[\left(p_{k+1}-1\right)q\right]-\left[\left(p_{k+1}-2\right)q\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Для довільного n існує таке k, що $n=s_{_{k+1}}+j,$ де

$$0\le j<p_{k+2}-p_{k+1}=\left(k+3\right)!-\left(k+2\right)!$$

Нехай

$$e_k'=e_k-\left[\left(p_k+e_k+1\right)q\right]-\left[\left(p_k+e_k\right)q\right].$$

Тоді, враховуючи, що $\beta_{ij}\in\left\{0,1\right\}$, знаходимо

$$N_1(x,n)=\sum_{i=1}^{k+1}e_k'-\left[\left(p_{k+1}+j\right)q\right]-\left[p_1 q\right]=$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{k+1}e_k'-\left[p_1 q\right]-\left\{\left(p_{k+1}+j\right)q\right\}\right)+\left(p_{k+1}+j\right)q.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_1(x,n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{N_1(x,n)}{p_{k+1}+j}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}e_k'}{p_{k+1}+j}-$$
$$-\lim_{n\to\infty}\frac{\left[p_1 q\right]}{p_{k+1}+j}-\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\left(p_{k+1}+j\right)q\right\}}{p_{k+1}+j}+\lim_{n\to\infty}\frac{p_{k+1}+j}{p_{k+1}+j}q=q.$$

Наслідок 2. Якщо $\left\{\varepsilon_n\right\}$ – довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць, то:

1). число $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{s^{p_i}}+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{e_j}\frac{1-\beta_{ij}}{s^{p_j+i}}$ є розв'язком рівняння $\nu_0^s=q$,

2). число $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{s^{p_i}}+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{e_j}\frac{\gamma\cdot\beta_{ij}}{s^{p_j+i}}$ є розв'язком рівняння $\nu_\gamma^s=q$,

де

$$\beta_{in}=\left[\left(p_n+i\right)q\right]-\left[\left(p_n+i-1\right)q\right],$$
$$p_n=\left(n+1\right)!+1,$$
$$e_n=p_{n+1}-p_n-1=\left(n+2\right)!-\left(n+1\right)!-1.$$

Наслідок 3. Функція $\nu_i^s\left(x\right)$ набуває всіх значень з відрізка $\left[0,1\right]$. Кожне значення вона набуває в континуальній множині x.

Оскільки вказано алгоритм для довільної послідовності $\{\varepsilon_n\}$ нулів та одиниць дозволяє однозначно вказати такий х, що $\nu_1^s = q$, а таких послідовностей існує континуум, то і множина розв'язків даного рівняння є континуальною.

Наслідок 4. При $s = 2$, $q = 0,5$ множина

$$x = \Delta^s_{\underbrace{\underbrace{\underbrace{00\varepsilon_1\beta_{11}\beta_{21}\dots\beta_{e_1 1}}_{p_1}\varepsilon_2\dots}_{p_2}\beta_{1k}\beta_{2k}\dots\beta_{e_1 k}}_{p_k}\varepsilon_{k+1}\dots},$$

є континуальною підмножиною множини нормальних чисел за основою 2.

Наслідок 5. Множина $D_i = \left\{x \in [0,1] \middle| \nu_i^s = q\right\}$ ($i = \overline{0, s-1}$) є фрактальною множиною.

Розглянемо множини рівнів функції $\nu_i^s(x)$. З цією метою, зафіксуємо i та s. Підмножиною розв'язків рівняння є множина $\nu_1^s = q,\ q \in [0,1]$, є

$$M\left[s, \left(p_0, q, p_2, \dots, p_{s-1}\right)\right] -$$

множина дійсних чисел з відрізка $[0,1]$ з фіксованими частотами

$$\nu_0^s = p_0,\ \nu_1^s = q,\ \nu_2^s = p_2,\ \dots,\ \nu_{s-1}^s = p_{s-1}.$$

Поклавши $p_0 = 1 - q$, отримаємо нижню оцінку розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини розв'язків рівняння $\nu_1^s = q$:

$$-\frac{\ln q^q (1-q)^{1-q}}{\ln s}.$$

Застосування у навчанні студентів. Дані алгоритми можуть бути застосовані при вивченні алгебри як додаткових матеріал для факультативів та поглибленого вивчення алгебри. В Херсонському державному університеті даних матеріал успішно застосовується у підготовці майбутніх вчителів математики та інформатики, інженерів-програмістів. Студентами спеціальності інформатика та програмна інженерія було створено програмне забезпечення на основі алгоритму побудови континуальної множини дійсних чисел, дробова частина яких має наперед задану, зокрема ірраціональну, частоту символа «і» в s-адичному зображенні.

Дана тема може бути розглянута як доповнення до вивчення теми «Мультиплікативні функції» у курсі «Алгебра і теорія чисел».

Алгоритм побудови може бути розглянутий при вивченні курсу «Основи алгоритмізації та програмування» для математиків та інформатиків, як приклад ітеративних алгоритмів, та застосування масивів для збереження даних.

Висновки. Функція частоти цифри $\nu_i^s(x)$ має непрості властивості. Вона є всюди розривною. В залежності від числа х частота $\nu_i^s(x)$ може не існувати і може існувати та набувати різних значень. Множиною значень функції $\nu_i^s(x)$ є відрізок [0,1]. Запропоновані в роботі алгоритми дозволяють знаходити інваріантні точки функції $\nu_i^s(x)$ з будь-якою наперед заданою точністю та будувати континуальну множину чисел з наперед заданою частотою.

Розглянутий алгоритм може бути застосований при поглибленому вивченні алгебри у ВНЗ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Биллигслей П. Эргодическая теория и информация. – М.: Мир, 1969. – 238 с.
2. Коробов Н. М. О некоторых вопросах равномерного распределения. Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем., 14 (1950), – С. 215-231.
3. Котова О. В. Континуальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа / О. В. Котова // Укр. мат. журн. – 2008. –60. – № 10. – С. 1414–1421.
4. Котова О. В. Фрактальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа / О. В. Котова // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки –Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. – 2006, № 7. – С.152–159.
5. Постников А.Г. Арифметическое моделирование случайных процессов// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.– 1960.– Т. 57. – С. 3-84.
6. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів [Текст] / М. В. Працьовитий. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
7. Торбін Г. М. Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання [Текст] / Г.М. Торбін – К.: ІМ НАН України – НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – № 1. – С. 53-55.

Стаття надійшла до редакції 05.05.15

Olga Kotova, Vladislav Kruglik
Kherson State University, Kherson, Ukraine

ITERATIVE ALGORITHMS OF SEARCHING NUMBERS WITH FIXED FREQUENCY OF THEIR SYMBOLS

Every numbering system has its own alphabet, which is used for symbolic representation of a number. Historically, the first system for representation of real numbers was s-adic numbering system ($1<s\in N$). It has a simple geometry and today it remains the most widespread and the most widely used. This system uses alphabet {0,1,...,s-1}=A and has a zero redundancy. Each irrational number is an s-adic irrational. A notion of a frequency of numbers in a number representation is natural for a theory of s-adic irrational numbers.

Algorithms of building a conceptual set of irrational roots of equation $v_i^s(x)=x$ and a continual set of real numbers, fraction of which has a previously specified irrational frequency of the character «i» in s-aic representation of a number x are suggested. A function of frequency of the number $v_i^s(x)$ has complicated properties. It is discontinuous everywhere. Depending on the number x, a frequency of $v_i^s(x)$ can not exist and can exist and take different values. A set of values of the function $v_i^s(x)$ is a segment [0,1]. Algorithms represetned in the paper allow to find invariant point of function $v_i^s(x)$ with any previously specified accuracy and build a continuum of numbers with a previously specified frequency.

Using these algorithms for conducting optional classes for faculties of physics and mathematics is shown.

Keywords: s-adic representation of numbers, frequency of symbol "i" in s-adic representation of number x, normal number, Iterative algorithm, software, elective course.

Котова О. В., Круглик В.С.
Херсонский государственный університет, Херосн, Украина

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ ЧИСЕЛ С ФИКСИРОВАННЫМИ ЧАСТОТАМИ ИХ СИМВОЛОВ

Каждая система исчисления имеет свой алфавит, который используется для символического представления числа. Исторически, первой системой представления

действительных чисел была s-адическая система исчисления ($1<s\in N$). Она имеет простую геометрию, и сегодня остается наиболее распространенной и широко используемой. Эта система использует алфавит {0,1,...,s-1}=A и имеет нулевую избыточность. Каждое иррациональное число есть s-адически иррациональным. Для теории s-адических иррациональных чисел естественным есть понятие частоты цифры в представлении числа.

Предложен алгоритм построения континуального множества иррациональных корней уравнения $v_i^s(x)=x$ и континуального множества действительных чисел, дробная часть которых имеет заранее заданную, в частности иррациональную, частоту символа «i» в s-адическом изображении числа x. Функция частоты цифры $v_i^s(x)$ имеет непростые свойства. Она всюду разрывная. В зависимости от числа x частота $v_i^s(x)$ может не существовать и может существовать, и принимать разные значения. Множеством значений функции $v_i^s(x)$ есть отрезок [0,1]. Предложенные в работе алгоритмы позволяют находить инвариантные точки функции $v_i^s(x)$ с любой заранее заданной точностью и строить континуальное множество чисел с заранее заданной частотой.

Показано использование данных алгоритмов для проведения факультативных занятий на физико-математических факультетах.

Ключевые слова: s-адическое изображение, частота символа «i» в s-адическом изображении числа x, нормальное число, итерационный алгоритм, программа, факультатив.