УДК 004:37

Кушнір В.А.
Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка, Кіровоград, Україна

ЗАДАЧІ З МАТЕМАТИКИ ІНТЕГРАТИВНОГО ЗМІСТУ

DOI: 10.14308/ite000507

Задачі інтегративного змісту вимагають застосування знань і вмінь з різних тем як однієї навчальної дисципліни, так і різних. Здебільшого на заняттях (чи в домашніх завданнях) розглядаються завдання на засвоєння різних властивостей понять, застосування при цьому різних теорем. У такий спосіб формуються однопредметні знання та ще й вузького змісту (з однієї теми). Такі знання є «рецептурними», ми називаємо їх ідеалізованими. Адже вони досить далекі від моделей реальних професійних проблем та проблем життя загалом, для розв'язання котрих потрібно застосувати знання й умінн,я здобуті в різних темах одного предмета, різних предметів, життєвого досвіду.

Для практичного формування інтегративних знань потрібно перед суб'єктами учіння ставити навчальні проблеми, котрі в межах «вузької предметності» не можуть бути розв'язаними взагалі, або таке розв'язання буде надто складним, наприклад, суть і зміст розв'язування проблеми (наукові підходи до розв'язування проблеми, створення математичних моделей, способи розв'язування таких моделей, засоби розв'язування, методики застосування засобів, аналіз розв'язків моделей і вибір потрібних, здійснення перевірки розв'язків тощо) потоне у навалі виконання технічних операцій.

Задачі інтегративного змісту зазвичай складніші, ніж задачі «вузької предметності». У наших задачах показником такої складності є зміст навчальної задачі, котрий розкритий у попередньому абзаці.

Розв'язування запропонованих у цій статті задач потребує знань із конструктивної геометрії (побудова кола, що дотикається двох чи трьох кіл): з аналітичної геометрії (метод координат на площині; віддаль між двома точками на координатній площині); з алгебри (складання системи ірраціональних рівнянь, спосіб розв'язування такої системи, розв'язання системи, аналіз результатів і вибір потрібного розв'язку за знайденим критерієм, перевірка розв'язків системи, поняття вектора і його координат); з математичного аналізу або алгебри в курсі шкіл із поглибленим вивченням математики чи спеціалізованих коледжів (поняття нескінченої числової послідовності та її збіжності, правила збіжності нескінченої послідовності чисел, поняття числового ряду і його збіжності, правила збіжності числового ряду, обчислення членів нескінченної та частинних сум числового ряду з наперед заданою точністю); з Maple (організація лінійних програм, організація циклів, умовні переходи, поняття множини і списків і робота з ними, розв'язування систем нелінійних рівнянь, побудова рисунків у програмному режимі, частину синтаксису Maple, створення програми відповідно до способу розв'язування задачі загалом, математичної моделі й способу її розв'язування, критерію вибору потрібного розв'язку моделі, умов і параметрів вихідних задач.

Розв'язування задач інтегративного змісту формує інтегративні знання як знання більш високого рівня порівняно з простою сукупністю однопредметних знань, розвиває пошуково-дослідницькі, творчі здібності, формує творчий потенціал, математичну й інформаційну культуру суб'єктів учіння. Такі задачі не розв'язуються типовими способами і за такими ж типовими алгоритмами, для кожної з них потрібно знайти свій спосіб розв'язування і створити відповідний йому алгоритм.

Ключові слова: *задачі інтегративного змісту, інтегративні знання, математична модель задачі, зміст навчальної проблеми, програма в Maple, алгоритм, програма.*

На сьогодні одним з важливих завдань при навчанні математики чи інших дисциплін є формування інтегративних міжпредметних знань й умінь як більш складних, як знань більш високого рівня порівняно з розрізненими однопредметними знаннями. Ситуації формування інтегративних знань виникають при розв'язуванні різних навчальних ситуацій, способи розв'язання котрих у межах одного навчального предмета надто складні або «однопредметне» розв'язування взагалі проблематичне, а то й неможливе. Так, наприклад, при розв'язуванні геометричних задач користуються координатним методом чи методом складання системи рівнянь, розв'язування котрих далеко не завжди прості; при великих обчислюваннях та виконанні складних рисунків – інформаційно-комунікаційними технологіями (ІКТ) тощо.

Задачі інтегративного змісту потрібно пропонувати суб'єктам учіння навчальних закладів різного ступеня, починаючи від шкіл профільного навчання й закінчуючи педагогічними, технічними й економічними університетами. Важливим є те, щоб розв'язування задач інтегративного змісту не вимагало знань й умінь, котрі виходять за межі навчальних програм відповідного навчального закладу або необхідні знання доповнювалися програмами гуртків, факультативів, спеціальних курсів.

Метою статті є приклади задач, розв'язування котрих вимагає інтеграції знань й умінь, сформованих у суб'єктів учіння як при вивченні окремих тем однієї навчальної дисципліни, так і різних навчальних дисциплін. ***Предметом*** дослідження виступає зміст інтегративних задач. ***Завданнями*** дослідження є: розкрити структуру і зміст наведених інтегративних задач; дослідити інтегративні складові розв'язування задач як усередині однієї навчальної дисципліни, так і різних навчальних дисциплін; створити алгоритми і програми в Maple для розв'язування задач.

Важливою ознакою інтегративності запропонованих у статті задач є використання Maple-технології при їх розв'язуванні. З приводу використання ІКТ у навчанні математики Биков В.Ю. зазначає, що проникнення ІКТ у навчальний процес створює передумови для кардинального оновлення як змістовно-цільових, так і технологічних сторін навчання, що виявляється у суттєвому збагаченні системи дидактичних прийомів, способів, засобів навчання, нетрадиційних педагогічних технологій, створених на використанні ІКТ [2].

По суті використання ІКТ у навчанні математики створює нову навчальну ситуацію, коли предметом учіння є не тільки власне «математичний предмет», а й певна ІКТ (інформаційно-комунікаційний предмет учіння), точніше її можливості у розв'язуванні тієї чи іншої навчальної ситуації [8]. При цьому наповнюються новим змістом наукові підходи, методи, способи навчання математики. На сьогодні стоїть питання про створення інтегративних навчальних дисциплін, наприклад, лінійної алгебри, аналітичної геометрії й інформатики. Вдалі спроби в цьому напрямку здійснені М.І.Жалдаком та його учнями [5].

Задача 1. Дано два концентричні кола. Встановити вид залежності між радіусами вписаних і описаних кіл rvn і R відповідно та кількістю n вписаних у кільце кіл.

Розв'язування. Зрозуміло, що не в будь-яке кільце можна вписати кола так, щоб вони заповнили кільце повністю. Для розв'язування задачі виконаємо дії.

Для побудови кіл, що вписуються в кільце, потрібно знайти залежність між кількістю вписаних у кільце кіл n, радіусом внутрішнього кола кільця rvn, радіусом зовнішнього кола кільця R.

З малюнка 1 можна таку залежність знайти.

Для її відшукання розглянемо трикутник ABO. Він прямокутний. Тоді маємо

$$\frac{AB}{AO} = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (4)$$

$\boldsymbol{AB} = \dfrac{\boldsymbol{R - rvn}}{2}$. $\boldsymbol{AO} = \dfrac{\boldsymbol{R + rvn}}{2}$. Підставивши значення AB і AO в (4), після перетворень маємо

$$\boldsymbol{R = rvn} \cdot \frac{1 + \boldsymbol{sin}(\frac{\pi}{\boldsymbol{n}})}{1 - \boldsymbol{sin}(\frac{\pi}{\boldsymbol{n}})} \qquad (5)$$

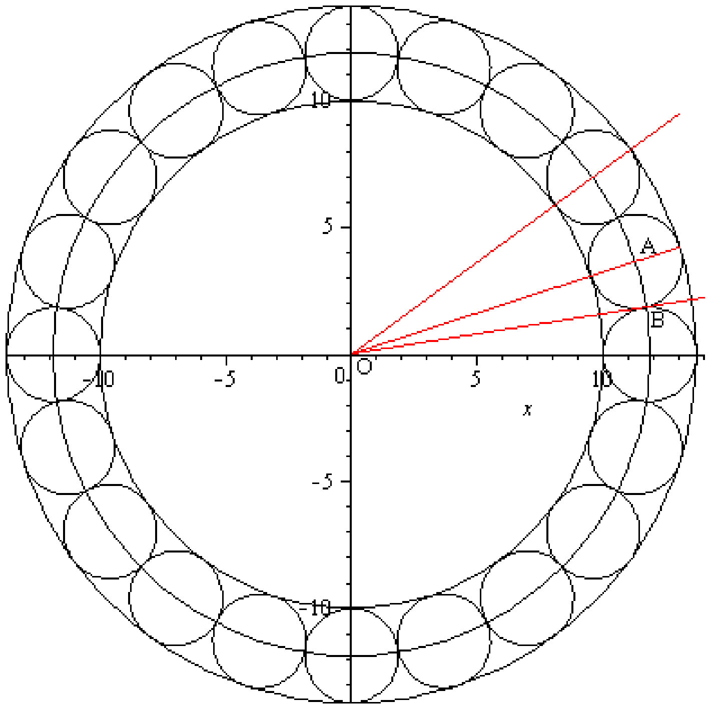

Рис. 1.

Якщо взяти n=20, rvn=10, то R=13.70888707, rad=1.854443535, де rad – радіуси вписаних у кільце кіл. На колі (0, 0, rvn+rad) будуть лежати центри вписаних у кільце кіл. Позначимо радіус цього кола r1. Зрозуміло, що r1=rvn+rad=11.854443535.

Для визначення координат центрів вписаних у кільце кіл використаємо полярну систему координат

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}1 \cdot \boldsymbol{cos}(\frac{(\boldsymbol{i}-1)\cdot\pi}{10}),\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}1 \cdot \boldsymbol{sin}(\frac{(\boldsymbol{i}-1)\cdot\pi}{10}),\ \boldsymbol{i} = 1,2,...,20.$$

Використаємо Maple для обчислення координат центрів усіх 20 кіл, що вписані в кільце, їх радіуси та побудуємо вписані кола. Програма та результати її роботи наведені нижче (мал. 1 вище).

Програма1.

$$with(MTM) : with(plottools) : with(plots) :$$
$$unassign('rvn','rad','R','L','x','y','r','i','j','n') :$$
$$n := 20 : rvn := 10 : R := evalf\left(rvn \cdot \frac{1 + \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{\mathrm{n}}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{\mathrm{n}}\right)}\right) : rad$$
$$:= \frac{\mathrm{R-rvn}}{2} :$$
$$L := seq([x[i], y[i], r[i]], \mathrm{i} = 1..\mathrm{n}) :$$

```
for i from 1 by 1 to n do
  x[i] := evalf(((R + rvn)/2)·cos((i - 1)/10·Pi)):
y[i] := evalf(((R + rvn)/2)·sin((i - 1)/10·Pi)):
r[i] := rad:
c[i] := circle([x[i], y[i]], r[i]):
print('i'= i, L[i]): end do:

unassign('i'):
m := [c[i]$(i = 1..20)]:
c21 := circle([0, 0], R): c22 := circle([0, 0], rvn):
c23 := circle([0, 0], rvn + rad):
p[1] := plot(evalf(tan(Pi/10))·x, x = 0..13):
p[2] := plot(evalf(tan(Pi/5))·x, x = 0..13):
p[3] := plot(evalf(tan(Pi/20))·x, x = 0..14):

unassign('i1'):
p11 := [p[i1]$(i1 = 1..3)]:
xk := evalf(((R + rvn)/2)·cos(1/20·Pi)):
yk := evalf(((R + rvn)/2)·sin(1/20·Pi)):
t11[1] := textplot([0, 0, "O"], align = {below, right}):
t11[2] := textplot([x[2], y[2], "A"], align = {above, right}):
t11[3] := textplot([xk, yk, "B"], align = {below, right}):

unassign('k'):
t1 := [t11[k]$(k = 1..3)]:
display(m, c21, c22, c23, p11, t1)
```

Програма видає на екран три параметри [x[i], y[i], r[i]], i=1, 2, … для кожного кола.

$i = 1$, [11.85444354, 0., 1.854443535]
$i = 2$, [11.27424578, 3.663224513, 1.854443535]
$i = 3$, [9.590446282, 6.967867088, 1.854443535]
$i = 4$, [6.967867086, 9.590446283, 1.854443535]
$i = 5$, [3.663224506, 11.27424578, 1.854443535]
$i = 6$, [0., 11.85444354, 1.854443535]
$i = 7$, [−3.663224506, 11.27424578, 1.854443535]
$i = 8$, [−6.967867086, 9.590446283, 1.854443535]
$i = 9$, [−9.590446282, 6.967867088, 1.854443535]
$i = 10$, [−11.27424578, 3.663224513, 1.854443535]
$i = 11$, [−11.85444354, 0., 1.854443535]
$i = 12$, [−11.27424578, −3.663224513, 1.854443535]
$i = 13$, [−9.590446282, −6.967867088, 1.854443535]
$i = 14$, [−6.967867086, −9.590446283, 1.854443535]
$i = 15$, [−3.663224506, −11.27424578, 1.854443535]
$i = 16$, [0., −11.85444354, 1.854443535]
$i = 17$, [3.663224506, −11.27424578, 1.854443535]
$i = 18$, [6.967867086, −9.590446283, 1.854443535]
$i = 19$, [9.590446282, −6.967867088, 1.854443535]
$i = 20$, [11.27424578, −3.663224513, 1.854443535]

Задача 2. Розрахувати, якими повинні бути внутрішній і зовнішній радіуси кулькового підшипника, щоб у нього помістилося 20 кульок діаметром 16 мм. (М.Я. Выготский [3]).

Для **розв'язування** скористаємося отриманою вище формулою (5), взявши в ній R=rvn+2rad. Підставимо це значення R у формулу (5), після перетворень одержимо

$$rvn = rad \cdot \frac{1 - sin(\frac{\pi}{n})}{sin(\frac{\pi}{n})}. \qquad (6)$$

У нашій задачі rad=6, n=20. Тоді

$$> \quad rvn := evalf\left(\frac{8\left(1-\sin\left(\frac{Pi}{20}\right)\right)}{\sin\left(\frac{Pi}{20}\right)}\right);$$

43.13962575

R=rvn+2rad=59.13962575, що співпадає з результатами в [3].

Задача 3. У коло радіуса R=3 вписане коло радіуса rvn=2 так, що вони дотикаються внутрішнім чином. Вписати в утворену двома колами фігуру («рогалик») кола, що дотикаються одне одного і двох заданих кіл. Знайти сумарну площу отриманих кругів.

Розв'язування. Загальний підхід до розв'язування задачі ґрунтується на ідеях і результатах праці [7]. Процес розв'язування розпочинаються з побудови малюнка (малюнок 2 побудований в Maple). Потрібно визначити координати центрів (x[i], y[i]) і їхні радіуси r[i], i=1,2,… вписаних кіл. Скористаємося методом координат. У нас u=x[i+1], v=y[i+1]. З малюнка 2 видно, що x[1]=0, y[1]=1, r[1]=1.

Далі послідовно знаходимо x[i], y[i], r[i], i=2, 3 … (у цьому полягає науковий підхід до розв'язування задачі). Виходячи з малюнка 2 і формули віддалі на площині в координатах [4], складаємо систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими (математична модель задачі)

$$\begin{cases} \sqrt{u^2+(v-4)^2}-2 = 3-\sqrt{u^2+(v-3)^2} \\ \sqrt{u^2+(v-4)^2}-2 = \sqrt{(u-x[i-1])^2+(v-y[i-1])^2}-r[i-1] \end{cases}, \quad i=2,3,\ldots \qquad (7)$$

При i=2 система (7) матиме розв'язки: 1) $[x[2]=\frac{12}{7},\ y[2]=\frac{12}{7}]$; 2) $[x[2]=-\frac{12}{7},\ y[2]=\frac{12}{7}]$. Для «правих» кіл підходить розв'язок 1).

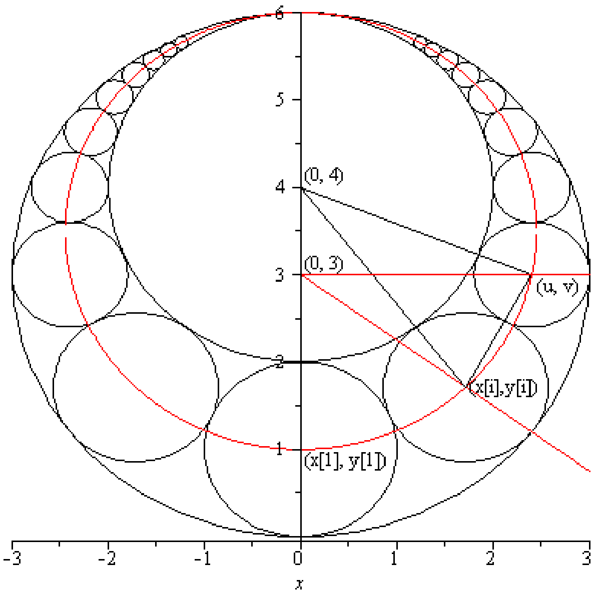

Рис. 2. (Програма 7)

Система (7) надто складна для ручних обчислень. Тому вона розв'язується в програмі 2, написаній на Maple. Там же виконується побудова малюнка 2. *Метод розв'язування системи (7) (розв'язування математичної моделі задачі) для користувача залишається невідомим, він залишається захованим у можливостях Maple.* Визначена узагальнена дія «розв'язування системи рівнянь (7)» виконується в Maple, а ланцюжок операцій цієї дії «сам собою розуміється» (спосіб розв'язування системи ірраціональних рівнянь і відповідний алгоритм).

Програма 2.

Модель (7) розв'язування задачі має два розв'язки. Спочатку будемо знаходити координати центрів «правих» вписаних кіл і їхні радіуси, ліві розташовані симетрично відносно осі ординат. На кожній ітерації з двох отриманих розв'язків моделі задачі вибирається потрібний. Параметри цих розв'язків (координати центрів вписаних «лівих» і «правих» кіл) будуть (i-1)-им і (i+1)-им колами. Вони «симетричні» відносно i-го кола. Нам потрібне коло, котре розташоване вище, а, значить, ордината його центру повинна бути більшою. Це і буде критерієм вибору потрібних розв'язків системи (7) для «правих» кіл.

Для кращого розуміння програм надамо короткий опис позначень. Програма 2 використовує модуль (пакет) MTM, що дає змогу більш раціонально розв'язувати систему (7). L – список з елементів-векторів [x[i],y[i], r[i]], i=1, 2, … n для «правих» кіл. S – список з елементів-векторів [–x[j], y[j], r[j]], j=2,3,…n для «лівих» кіл. x і y – списки абсцис і ординат центрів кіл з елементами x[i], y[i] відповідно. c i d – списки «правих» і «лівих» кіл як геометричних об'єктів. r – списки радіусів вписаних кіл. c1 і c2 верхні та нижні частини еліпсу як геометричних об'єктів (на еліпсі розташовані центри вписаних кіл). ск1 і ск2 – два вихідні базові кола як геометричні об'єкти. lin – список ліній як геометричних об'єктів. z – список позначень точок та їх координат як геометричних об'єктів.

Програма видає для десяти «правих» і дев'яти «лівих» кіл як точні значення (у вигляді звичайних дробів) параметрів, так і наближених у вигляді десяткових дробів (у програмі списки L i S відповідно).

```
with(MTM) : with(plottools) : with(plots) :
unassign('x','y','r','L','n','t','c','d') :
n := 10 :
L := seq([x[i], y[i], r[i]], i = 1 ..n) :
S := seq([ -x[j], y[j], r[j]], j = 2 ..n) :

x[1] := 0 : y[1] := 1 : r[1] := 1 :
c[1] := circle([x[1], y[1]], r[1]) :
```

$$x[2] := \frac{12}{7} : y[2] := \frac{12}{7} : r[2] := 3 - \sqrt{x[2]^2 + (y[2]-3)^2} :$$

```
c[2] := circle([x[2], y[2]], r[2]) :
print(1, L[1]) :
print(2, L[2]) :
```

for i **from** 3 **by** 1 **to** n **do** $unassign('u','v')$:

$u, v := solve\Big(\sqrt{u^2+(v-4)^2}-2=3-\sqrt{u^2+(v-3)^2},$
$\sqrt{u^2+(v-4)^2}-2=\sqrt{(u-x[i-1])^2+(v-y[i-1])^2}-r[i$
$-1]\Big)$
:

if $v[2]>v[1]$ **then** $x[i]:=u[2]:y[i]:=v[2]$
else $x[i]:=u[1]:y[i]:=v[1]$ **end if**:

$r[i]:=3-\sqrt{x[i]^2+(y[i]-3)^2}$:
$print(i, L[i], evalf(L[i]))$:
$c[i]:=circle([x[i], y[i]], r[i])$:
end do:
$print(S)$:
for j **from** 2 **by** 1 **to** n **do**
$d[j]:=circle([-x[j], y[j]], r[j])$:
end do:

$$e1 := plot\left(0.5\cdot\left(5.\cdot\sqrt{\frac{6.-x^2}{6.}}+7.\right), x=-3..3\right):$$

$$e2 := plot\left(-0.5\cdot\left(5.\cdot\sqrt{\frac{6-x^2}{6.}}+7.\right)+7., x=-3..3\right):$$

$$l1 := plot\left(-\frac{3}{4}\cdot x+3, x=0..3\right):$$

$$l2 := \mathrm{line}\left([0,4], \left[\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right]\right):$$

$$l3 := \mathrm{line}\left([0,4], \left[\frac{12}{5}, 3\right]\right):$$

$$l4 := \mathrm{line}\left(\left[\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right], \left[\frac{12}{5}, 3\right]\right):$$

$$l5 := \mathrm{plot}(3, \mathrm{x}=0..3):$$

$t[1] := textplot([0, 4, "(0, 4)"], align=\{above, right\})$:
$t[2] := textplot([0, 3, "(0, 3)"], align=\{above, right\})$:
$t[3] := textplot([0, 1, "(x[1], y[1])"], align=\{below, right\})$:

$$t[4] := textplot\left(\left[\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, "(x[i],y[i])"\right], align=right\right):$$

$$t[5] := textplot\left(\left[\frac{12}{5}, 3, "(u, v)"\right], align=\{below, right\}\right):$$

$unassign('k')$:
$t := [t[k]\$(k=1..5)]$:
$unassign('i')$:
$c := [c[i]\$(i=1..10)]$:
$unassign('j')$:
$d := [d[j]\$(j=2..10)]$:
$cr1 := circle([0,3], 3) : cr2 := circle([0,4], 2)$:
$display(cr1, cr2, t, c, e1, e2, l1, l2, l3, l4, l5, d)$

$1, [0, 1, 1]$

$$2, \left[\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, \frac{6}{7}\right]$$

$$3, \left[\frac{12}{5}, 3, \frac{3}{5}\right], [2.400000000, 3., 0.6000000000]$$

$$4, \left[\frac{12}{5}, 4, \frac{2}{5}\right], [2.400000000, 4., 0.4000000000]$$

$$5, \left[\frac{24}{11}, \frac{51}{11}, \frac{3}{11}\right], [2.181818182, 4.636363636, 0.2727272727]$$

$$6, \left[\frac{60}{31}, \frac{156}{31}, \frac{6}{31}\right], [1.935483871, 5.032258065, 0.1935483871]$$

$7, \left[\frac{12}{7}, \frac{37}{7}, \frac{1}{7}\right], [1.714285714, 5.285714286, 0.1428571429]$

$8, \left[\frac{84}{55}, \frac{60}{11}, \frac{6}{55}\right], [1.527272727, 5.454545455, 0.1090909091]$

$9, \left[\frac{48}{35}, \frac{39}{7}, \frac{3}{35}\right], [1.371428571, 5.571428571, 0.08571428571]$

$10, \left[\frac{36}{29}, \frac{164}{29}, \frac{2}{29}\right], [1.241379310, 5.655172414, 0.06896551724]$

$$\left[-\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, \frac{6}{7}\right], \left[-\frac{12}{5}, 3, \frac{3}{5}\right], \left[-\frac{12}{5}, 4, \frac{2}{5}\right], \left[-\frac{24}{11}, \frac{51}{11}, \frac{3}{11}\right], \left[-\frac{60}{31}, \frac{156}{31}, \frac{6}{31}\right], \left[-\frac{12}{7}, \frac{37}{7}, \frac{1}{7}\right], \left[-\frac{84}{55}, \frac{60}{11}, \frac{6}{55}\right], \left[-\frac{48}{35}, \frac{39}{7}, \frac{3}{35}\right], \left[-\frac{36}{29}, \frac{164}{29}, \frac{2}{29}\right]$$

Задача 4. Визначити, на якій лінії лежать центри вписаних кіл.

Розв'язування. Центри усіх вписаних кіл будуть лежати на еліпсі з центром у точці $\boldsymbol{(o, \frac{7}{2})}$ з осями $\boldsymbol{a} = \sqrt{6}, \boldsymbol{b} = \frac{5}{2}$.

$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{6} + \frac{4(\boldsymbol{y} - 3{,}5)^2}{25} = 1 \qquad (3)$$

У програмному режимі можна показати, що координати центрів вписаних кіл задовольняють рівнянню еліпса для будь-якого скінченого значення n.

<u>Програма 3.</u> (Може виконуватися тільки після виконання в Maple програми 2. Адже множина L(x[i], y[i], r[i]), i=1,2,…,n) обраховується в програмі 2). Програма працює в режимі точних обчислень.

\>

for i **from** 1 **by** 1 **to** n **do**

if $\frac{x[i]^2}{6} + \frac{4\left(y[i] - \frac{7}{2}\right)^2}{25} \neq 1$

then *print*('i'= i, fals)

end if: **end do**: *print*('усе добре') :

усе добре

Однак така перевірка для скінченого числа членів нескінченої послідовності ще не є доведенням за повною математичною індукцією. Для повної індукції потрібно показати, що і центр (n+1)-го кола буде лежати на наведеному вище еліпсі. Позначимо u=x[n+1], v=y[n+1]. Для відшукання u і v складемо і виконаємо програму.

Програма 4.

$with(MTM) : unassign('u','v') :$

$u, v := solve\left(\sqrt{u^2 + (v-4)^2} - 2 = 3 - \sqrt{u^2 + (v-3)^2}, \sqrt{u^2 + (v-4)^2} - 2 = \sqrt{(u - x[i-1])^2 + (v - y[i-1])^2} - r[i-1], u, v\right)$

:

$u[1] := factor(u[1]); v[1] := factor(v[1]);$

$u[2] := factor(u[2]); v[2] := factor(v[2]);$

Результат виконання програми такий (наводимо ці результати щоб читач зрозумів які складні обчислення потрібно виконувати)

$$
\begin{aligned}
u_1 := \Big(& 216\,x_{i-1}^2 - 12\,x_{i-1}^2\,r_{i-1} - 84\,x_{i-1}^2\,y_{i-1} - 12\,x_{i-1}^2\,r_{i-1}^2 \\
& + 12\,x_{i-1}^2\,y_{i-1}^2 + 12\,x_{i-1}^4 \\
& - 5\,y_{i-1}\left(-6\,x_{i-1}^2\left(r_{i-1}^2 - 4\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 8\,y_{i-1} - 12 - y_{i-1}^2\right)\left(r_{i-1}^2 + 6\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 6\,y_{i-1} - y_{i-1}^2\right)\right)^{1/2} \\
& + r_{i-1}\left(-6\,x_{i-1}^2\left(r_{i-1}^2 - 4\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 8\,y_{i-1} - 12 - y_{i-1}^2\right)\left(r_{i-1}^2 + 6\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 6\,y_{i-1} - y_{i-1}^2\right)\right)^{1/2} \\
& + 18\left(-6\,x_{i-1}^2\left(r_{i-1}^2 - 4\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 8\,y_{i-1} - 12 - y_{i-1}^2\right)\left(r_{i-1}^2 + 6\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 6\,y_{i-1} - y_{i-1}^2\right)\right)^{1/2}\Big) \Big/ \Big(\big(324 \\
& - 10\,y_{i-1}\,r_{i-1} + 24\,x_{i-1}^2 - 180\,y_{i-1} + 36\,r_{i-1} + 25\,y_{i-1}^2 + r_{i-1}^2\big)\,x_{i-1}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1 := \frac{1}{2}\Big(& 252\,r_{i-1} - 25\,y_{i-1}\,r_{i-1}^2 - 5\,x_{i-1}^2\,r_{i-1} + 78\,x_{i-1}^2 + 648 \\
& + 25\,x_{i-1}^2\,y_{i-1} - 5\,y_{i-1}^2\,r_{i-1} - 90\,y_{i-1}^2 + 102\,r_{i-1}^2 \\
& - 180\,y_{i-1} + 25\,y_{i-1}^3 - 60\,y_{i-1}\,r_{i-1} + 5\,r_{i-1}^3 \\
& + 10\left(-6\,x_{i-1}^2\left(r_{i-1}^2 - 4\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 8\,y_{i-1} - 12 - y_{i-1}^2\right)\left(r_{i-1}^2 + 6\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 6\,y_{i-1} - y_{i-1}^2\right)\right)^{1/2}\Big) \Big/ \Big(324 \\
& - 10\,y_{i-1}\,r_{i-1} + 24\,x_{i-1}^2 - 180\,y_{i-1} + 36\,r_{i-1} + 25\,y_{i-1}^2 + r_{i-1}^2\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 := -\Big(& -216\,x_{i-1}^2 + 12\,x_{i-1}^2\,r_{i-1} + 84\,x_{i-1}^2\,y_{i-1} + 12\,x_{i-1}^2\,r_{i-1}^2 \\
& - 12\,x_{i-1}^2\,y_{i-1}^2 - 12\,x_{i-1}^4 \\
& + 18\left(-6\,x_{i-1}^2\left(r_{i-1}^2 - 4\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 8\,y_{i-1} - 12 - y_{i-1}^2\right)\left(r_{i-1}^2 + 6\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 6\,y_{i-1} - y_{i-1}^2\right)\right)^{1/2} \\
& - 5\,y_{i-1}\left(-6\,x_{i-1}^2\left(r_{i-1}^2 - 4\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 8\,y_{i-1} - 12 - y_{i-1}^2\right)\left(r_{i-1}^2 + 6\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 6\,y_{i-1} - y_{i-1}^2\right)\right)^{1/2} \\
& + r_{i-1}\left(-6\,x_{i-1}^2\left(r_{i-1}^2 - 4\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 8\,y_{i-1} - 12 - y_{i-1}^2\right)\left(r_{i-1}^2 + 6\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 6\,y_{i-1} - y_{i-1}^2\right)\right)^{1/2}\Big) \Big/ \Big(\big(324 \\
& - 10\,y_{i-1}\,r_{i-1} + 24\,x_{i-1}^2 - 180\,y_{i-1} + 36\,r_{i-1} + 25\,y_{i-1}^2 + r_{i-1}^2\big)\,x_{i-1}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_2 := -\frac{1}{2}\Big(&-252\,r_{i-1} + 25\,y_{i-1}\,r_{i-1}^2 + 5\,x_{i-1}^2\,r_{i-1} - 78\,x_{i-1}^2 \\
&- 648 - 25\,x_{i-1}^2\,y_{i-1} + 5\,y_{i-1}^2\,r_{i-1} + 90\,y_{i-1}^2 - 102\,r_{i-1}^2 \\
&+ 180\,y_{i-1} - 25\,y_{i-1}^3 + 60\,y_{i-1}\,r_{i-1} - 5\,r_{i-1}^3 \\
&+ 10\Big(-6\,x_{i-1}^2\,\big(r_{i-1}^2 - 4\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 8\,y_{i-1} - 12 - \\
&y_{i-1}^2\big)\,\big(r_{i-1}^2 + 6\,r_{i-1} - x_{i-1}^2 + 6\,y_{i-1} - y_{i-1}^2\big)\Big)^{1/2}\Big) \Big/ \Big(324 \\
&- 10\,y_{i-1}\,r_{i-1} + 24\,x_{i-1}^2 - 180\,y_{i-1} + 36\,r_{i-1} + 25\,y_{i-1}^2 + \\
&r_{i-1}^2\Big)
\end{aligned}
$$

Програма 5. (виконується тільки після виконання програми 4 в режимі точних обчислень). Програма 5 перевіряє, чи належать знайдені програмою 4 координати центрів вписаних кіл у загальному вигляді (u[1],v[1]), (u[2],v[2]) рівнянню еліпсу. Цим самим буде показано, що координати знайдені правильно.

$$> \; factor\left(expand\left(\frac{u[2]^2}{6} + \frac{4\cdot\left(v[2]-\frac{7}{2}\right)^2}{25}\right)\right);$$

$$factor\left(expand\left(\frac{u[1]^2}{6} + \frac{4\cdot\left(v[1]-\frac{7}{2}\right)^2}{25}\right)\right);$$

$$1$$
$$1$$

\>

Зрозуміло, що всі наведені обчислення виконати вручну практично неможливо.

Отже, методом повної математичної індукції ми показали, що центри всіх вписаних кіл лежать на еліпсі (3).

Задача 5. Показати, що ряд $\pi\cdot\sum_{1}^{\infty}\boldsymbol{s[i]}$, складений із площ вписаних кругів, буде збіжним.

Розв'язування. Потрібно показати, що послідовність $\boldsymbol{s[i]}=\pi\cdot\boldsymbol{r[i]}^2$, i=1,2,… буде збігатися (покажемо для «правих» кіл, починаючи з першого кола, для «лівих» кіл аналогічно). З геометричних міркувань зрозуміло, що координати центрів вписаних кіл $\boldsymbol{(x[i], y[i])}\to(0{,}6)$ при русі цих центрів по еліпсу (5) з прямуванням $\boldsymbol{i}\to\infty$. Тоді $\boldsymbol{r[i]}=3-\sqrt{\boldsymbol{x[i]}^2+(\boldsymbol{y[i]}-3)^2}\to 0$ при $\boldsymbol{i}\to\infty$. Центри вписаних кіл (x[i], y[i]) рухаються по еліпсу (3) і послідовність x[i], i=1, 2,… буде, починаючи з i=3 монотонно спадною і обмеженою знизу числом нуль. Тоді (М.І. Шкіль [11]) вона матиме границею число 0 (точна нижня грань). Аналогічно послідовність y[i], i=1, 2,… буде монотонно ростучою і обмеженою зверху числом 6, і матиме границю число 6 (точна верхня грань). Виходячи з рівняння еліпса (3), можна визначити $\boldsymbol{x[i]}^2$ і підставити в формулу $\boldsymbol{r[i]}=3-\sqrt{\boldsymbol{x[i]}^2+(\boldsymbol{y[i]}-3)^2}$. Після перетворень матимемо $\boldsymbol{r[i]}=3-\dfrac{\boldsymbol{y[i]}+9}{5}=\dfrac{6-\boldsymbol{y[i]}}{5}\to 0$ при $\boldsymbol{i}\to\infty$. Тоді буде збіжною і послідовність $\boldsymbol{s[i]}=\pi\cdot\boldsymbol{r[i]}^2$, i=1,2,…, адже, починаючи з деякого номера k $\boldsymbol{r[i]}^2<\boldsymbol{r[i]}$. Тобто збіжна послідовність $\boldsymbol{r[i]}$, i=1,2… буде мажорантою для послідовності $\boldsymbol{r[i]}^2$. Тоді буде збіжним і ряд $\sum s[i] = \pi \cdot \sum r[i]^2$. Окрім цього послідовність його частинних сум («праві» круги, для «лівих» аналогічно) $S[n] = \sum_{1}^{n} s[i]$, n=1,2,… буде монотонно ростучою і обмеженою згори площею «рогалика». Значить буде існувати і сума ряду $S = \sum_{1}^{\infty} s[i]$.

Задача 6. Знайти наближене значення суми площ вписаних у «рогалик» кругів («лівих» і «правих»). Загальне число кругів 19 (десять «правих» і дев'ять «лівих»).

Розв'язування. Алгоритм розв'язування видно з програми 6.

<u>Програма 6.</u> (Може працювати тільки після виконання програми 2).

```
> unassign('S') : S := 0 : print('i'= 1,'S'= Pi·r[1]^2, 'S'≈ evalf(Pi
      ·r[1]^2)) :
  for i from 2 by 1 to n do
  S := S + 2· Pi·r[i]^2 : print('i'= i,'S'= S,'S'≈ evalf(S)) :end do:
  S := S + Pi·r[1]^2; print('S'≈ evalf(S));
```

$i = 1, S = \pi, S \approx (3.141592654)$

$i = 2, S = \frac{72}{49}\pi, S \approx (4.616217777)$

$i = 3, S = \frac{2682}{1225}\pi, S \approx (6.878164488)$

$i = 4, S = \frac{3074}{1225}\pi, S \approx (7.883474137)$

$i = 5, S = \frac{394004}{148225}\pi, S \approx (8.350818500)$

$i = 6, S = \frac{389310044}{142444225}\pi, S \approx (8.586192767)$

$i = 7, S = \frac{395124094}{142444225}\pi, S \approx (8.714421040)$

$i = 8, S = \frac{398514502}{142444225}\pi, S \approx (8.789196135)$

$i = 9, S = \frac{80121512}{28488845}\pi, S \approx (8.835358314)$

$i = 10, S = \frac{67610102352}{23959118645}\pi, S \approx (8.865242667)$

$S := \frac{91569220997}{23959118645}\pi$

$S \approx (12.00683532)$

Задача 7. Обчислювати значення x[i], y[i], r[i], i=1,2, … до тих пір, поки різниця між їхніми сусідніми значеннями не буде менша 0.001.

Розв'язування. Критерієм для закінчення обчислень буде

Delta<=abs(x[i]-x[i-1])+abs(y[i]-y[i-1])+abs(r[i]-r[i-1])

Програма 7.

Для організації циклу використаємо оператор while. Програма працює в режимах точних і наближених обчислень.

```
with(MTM) :
unassign('x','y','r','L') : eps := 0.001 :
n := 2 :
L := seq([x_i, y_i, r_i], i = 1 ..n) :
x[1] := 0 : y[1] := 1 : r[1] := 1 :
x[2] := 12/7 : y[2] := 12/7 : r[2] := 3 - sqrt(x[2]^2 + (y[2]-3)^2) :
i := 2 :
while abs(L[i - 1][1]-L[i][1]) + abs(L[i - 1][2]-L[i][2])
    + abs(L[i - 1][3]-L[i][3]) ≥ eps do i := i + 1 :
unassign('u','v') :
n := i :
L := seq([x_i, y_i, r_i], i = 1 ..n) :
u, v := solve(sqrt(u^2 + (v - 4)^2) - 2 = 3-sqrt(u^2 + (v - 3)^2),
sqrt(u^2 + (v - 4)^2) - 2 = sqrt((u - x[i - 1])^2 + (v - y[i - 1])^2) -r[i
    - 1])
:
if v[2] > v[1] then x[i] := u[2] : y[i] := v[2]
else x[i] := u[1] : y[i] := v[1] end if:
r[i] := 3-sqrt(x[i]^2 + (y[i]-3)^2) :
  end do:
Δ := abs(L[i - 1][1]-L[i][1]) + abs(L[i - 1][2]-L[i][2])
    + abs(L[i - 1][3]-L[i][3]) :
print('i'= i) : print('L[i]'= L[i]) :
print('L[i]'= evalf(L[i])) : print('Δ'= evalf(Δ)) :
```

$i = 114$

$L_i = \left[\frac{1356}{12775}, \frac{15324}{2555}, \frac{6}{12775}\right]$

$L_i = [0.1061448141, 5.997651663, 0.0004696673190]$

$\Delta = 0.0009973413586$

Отже, за наведеним критерієм (досить сильним) потрібно обрахувати параметри вписаних кіл до 114 включно [x[114], y[114], r[114]]. Аналогічно можна обрахувати кількість потрібних кругів, щоб різниця площ останніх була менша delta.

Задача 8. Здійснити декомпозицію задачі 3 на дві задачі.

Розв'язування.

Програма 2 й подальші програми працюють і видають точні результати тільки тоді, коли система (7) має тільки раціональні розв'язки. Однак нелінійна система (7) може мати й ірраціональні розв'язки. Тому потрібно програму 2 написати для загального випадку – розв'язки будуть тільки дійсні і наближені.

Програма 2 досить велика. Доцільно розбити її на дві програми відповідно декомпозиції вихідної задачі. Перша задача й відповідна програма обчислює координати й радіуси вписаних кіл, а друга задача й відповідна програма виконують побудову всього малюнка.

Програма 2 розв'язує ***задачу 3*** з визначеними радіусами зовнішнього й внутрішнього кіл, а саме: rvn=2, R=3. При таких вихідних даних координати вписаних в «рогалик» кіл і їхні радіуси будуть визначені як раціональні числа. Однак є сенс написати програму, котра здійснювала б обчислення ценртів вписаних кіл і їхніх радіусів для довільних rvn < R.

Усі три наведені проблеми будуть розв'язані нижче у вигляді двох програм. Останній цикл програми 8 перевіряє належність центрів кіл еліпсу. Обчислення виконуються в наближеному режимі.

Програма 8. (R=7, rvn=5, n=10).

```
with(MTM) :
unassign('x','y','r','L','S','n','i','j1','j2') :
n := 10 : R := 7. : rvn := 5. :
L := seq([x[i], y[i], r[i]], i = 1 ..n) :
S := seq([-x[j2], y[j2], r[j2]], j2 = 2 ..n) :
x[1] := 0 : y[1] := R - rvn : r[1] := R - rvn :
print('i'= 1, L[1]) : c[1] := circle([x[1], y[1]], r[1]) :


for i from 2 by 1 to n do unassign('u','v') :
u, v := solve(sqrt(u^2 + (v - 2·R + rvn)^2) - rvn = R
    - sqrt(u^2 + (v - R)^2),
sqrt(u^2 + (v - 2.R + rvn)^2) - rvn
    = sqrt((u - x[i - 1])^2 + (v - y[i - 1])^2) -r[i - 1])
 :
  if v[2] ≥ v[1] and u[2] > 0 then x[i] := u[2] : y[i] := v[2] :
 elif v[2] ≤ v[1] and u[1] > 0  then x[i] := u[1] : y[i] := v[1] : end
     if:
 r[i] := R - sqrt(x[i]^2 + (y[i] - R)^2) :
 print('i'= i, evalf(L[i])) :
 c[i] := circle([x[i], y[i]], r[i]) :
 end do:

for j2 from 1 by 1 to n -1 do print('j2'= j2, evalf(S[j2])) :end do:
b := (R + rvn)/2 : xe := 0 : ye := (3 R - rvn)/2 :
a := abs(sqrt((x[2]^2·b^2)/(b^2 - (y[2] - ye)^2)));
for j1 from 1 by 1 to n do
print(x[j1]^2/a^2 + (y[j1] - ye)^2/b^2) : end do:
```

$i = 1, [0, 2., 2.]$
$i = 2, [3.589743590, 3.230769231, 1.794871795]$
$i = 3, [5.490196079, 5.764705883, 1.372549019]$
$i = 4, [5.915492958, 8.084507042, 0.985915493]$
$i = 5, [5.656565657, 9.757575757, 0.707070707]$
$i = 6, [5.185185186, 10.88888889, 0.518518517]$
$i = 7, [4.692737431, 11.65363128, 0.391061455]$
$i = 8, [4.242424244, 12.18181818, 0.303030303]$
$i = 9, [3.848797253, 12.55670103, 0.240549828]$
$i = 10, [3.509749305, 12.83008356, 0.194986076]$
$j2 = 1, [-3.589743590, 3.230769231, 1.794871795]$
$j2 = 2, [-5.490196079, 5.764705883, 1.372549019]$
$j2 = 3, [-5.915492958, 8.084507042, 0.985915493]$
$j2 = 4, [-5.656565657, 9.757575757, 0.707070707]$
$j2 = 5, [-5.185185186, 10.88888889, 0.518518517]$
$j2 = 6, [-4.692737431, 11.65363128, 0.391061455]$
$j2 = 7, [-4.242424244, 12.18181818, 0.303030303]$
$j2 = 8, [-3.848797253, 12.55670103, 0.240549828]$
$j2 = 9, [-3.509749305, 12.83008356, 0.194986076]$
$a := 5.916079783$
1.000000000
1.000000000
1.000000000
1.000000000
1.000000000

1.000000000
0.9999999993
1.000000000
1.000000000
0.9999999988

Програма 9. (R=7, rvn=5, n=10. Може виконуватися тільки разом з програмою 8, точніше після її виконання. Особливість Maple така, що всі програми, що висвітлені в одному вікні дисплею (записані в одному файлі), пов'язані одна з одною, зокрема, кожна наступна програма користується результатами попередніх програм (тих, що виконалися попереду). Тому можна у такий спосіб здійснювати декомпозицію вихідної задачі, що з позицій створення програми простіше й можна обійтися без процедур (proc), що спрощує задачу проектування, створення й налагодження програм.

$with(plottools) : with(plots) :$
$unassign('i','j') :$
for j **from** 2 **by** 1 **to** n **do**
$d[j] := circle([-x[j], y[j]], r[j]) :$
end do:

$$e1 := plot\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}\cdot b}{a} + \mathrm{ye}, x = -\mathrm{R}\,..\mathrm{R}\right) :$$

$$e2 := plot\left(-\frac{\sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}\cdot b}{a} + \mathrm{ye}, \mathrm{x} = -\mathrm{R}\,..\mathrm{R}\right) :$$

$$l[1] := plot\left(\frac{\mathrm{y}[2]-\mathrm{R}}{x[2]}\cdot x + \mathrm{R}, \mathrm{x} = 0\,..\mathrm{x}[2] + r[2]\right) :$$

$\mathrm{l}[2] := \mathrm{line}([0, 2R - rvn], [\mathrm{x}[2], \mathrm{y}[2]]) :$
$\mathrm{l}[3] := \mathrm{line}([0, 2R - rvn], [\mathrm{x}[3], \mathrm{y}[3]]) :$
$\mathrm{l}[4] := \mathrm{line}([0, \mathrm{R}], [x[2], \mathrm{y}[2]]) :$

$$\mathrm{l}[5] := \mathrm{plot}\left(\frac{\mathrm{y}[3]-\mathrm{R}}{x[3]}\cdot \mathrm{x} + \mathrm{R}, \mathrm{x} = 0\,..\mathrm{x}[3] + r[3]\right) :$$

$l[6] := line([x[2], y[2]], [x[3], y[3]]) :$

$$l[7] := line\left(\left[-\frac{R}{2}, R\right], [0, R]\right) :$$

$t[1] := textplot([0, 2R - rvn, typeset([0, 2R - rvn])], align = \{above, right\}) :$

$$t[2] := textplot\left(\left[-\frac{R}{2}, R, typeset([0, R])\right], align = \{above, right\}\right) :$$

$t[3] := textplot([0, \mathrm{y}[1], \mathrm{typeset}([0, \mathrm{y}[1]])], align = \{below, right\}) :$
$t[4] := textplot([\mathrm{x}[2], \mathrm{y}[2], \text{"(x[i],y[i])"}], align = right) :$
$t[5] := textplot([\mathrm{x}[3], \mathrm{y}[3], \text{"(u, v)"}], align = \{below, right\}) :$

$unassign('k1') :$
$z := [t[k1]\$(k1 = 1\,..5)] :$
$unassign('k2') :$
$a1 := [c[k2]\$(\mathrm{k2} = 1\,..10)] :$
$unassign('k3') :$
$b1 := [d[k3]\$(\mathrm{k3} = 2\,..10)] :$
$unassign('k4') :$
$lin := [l[k4]\$(k4 = 1\,..7)] :$
$cr1 := circle([0, \mathrm{R}], R) : cr2 := circle([0, 2R - rvn], \mathrm{rvn}) :$
$display(\mathrm{cr1}, \mathrm{cr2}, \mathrm{e1}, \mathrm{e2}, \mathrm{z}, \mathrm{a1}, \mathrm{b1}, \mathrm{lin})$

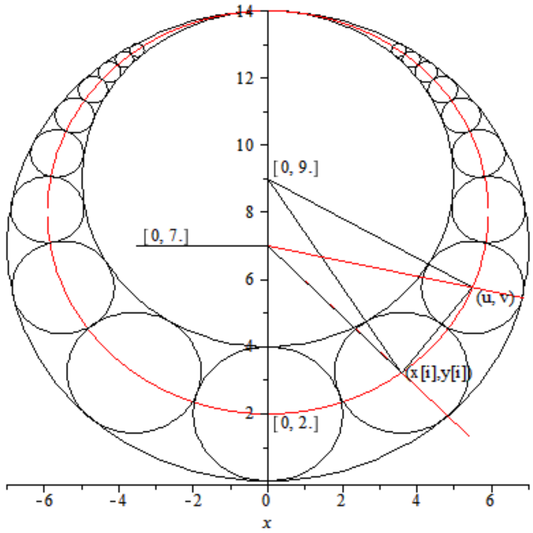

Рис. 3.

При інших значеннях R і rvn будуть інші малюнки.Наприклад,
R=7, rvn=3.

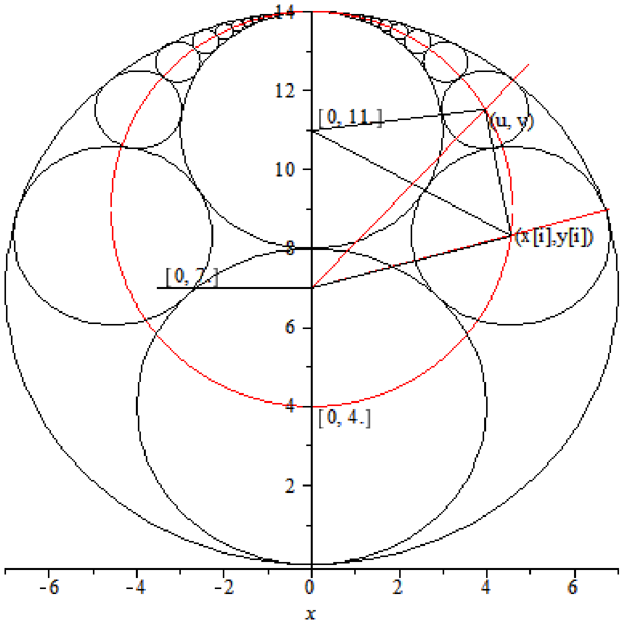

Рис. 4.

Формування інтегративних знань як усередині одного предметау, так і міжпредметних, розвиває пошуково-дослідницькі, творчі здібності, формує складні знання й уміння [6], творчий потенціал особистості учня чи студента.

При використанні ІКТ сам «математичний предмет» учіння і його складові (загальний підхід до розв'язування задачі, підхід до створення математичної моделі, метод розв'язування математичної моделі, аналіз розв'язків математичної моделі тощо) аналізуються суб'єктом учіння детально, до дрібниць (інакше написана програма не працюватиме). Отже, відбувається найбільш повне розгортання навчальної проблеми (у нас задачі), що згідно Н.Ф.Тализіної [9] є необхідним етапом засвоєння знань суб'єктами учіння.

Так програма 4 розв'язує систему рівнянь (7) у точних обчисленнях, що зробити вручну практично неможливо.

Кожна дія в Maple наших програм зрозуміла суб'єктові учіння, принаймні вона ґрунтується на «орієнтовній основі дій» (Н.Ф.Тализіна [9]), котра передбачена навчальними планами й програмами й повинна бути засвоєна суб'єктами учіння. Дії, запрограмовані в Maple, є узагальненими в тому розумінні, що вони включають у себе ланцюжки операцій, вже відомих суб'єктам учіння й тому їх програмувати не обов'язково, що зекономить час, зменшить ризики допущення помилок в обчисленнях, зосередить увагу суб'єктів учіння на суті і змісті розв'язування задачі, про що говорилося вище.

Алгоритмічні приписи наших програм добре описуються засобами Maple і тому окремо (крім програм) їх створювати, наприклад, у вигляді графів, не має потреби, на чому наголошував В.З. Аладьєв [1]. Ю.Г. Фокин [10] зазначав, що технологічні приписи описують не операції, що підлягають безпосередньому виконанню, а часткові дії, котрі потрібно виконати для досягнення поставленої цілі. Саме такі часткові дії й можна описати в Maple.

Алгоритми-програми створювалися автором, опираючись на об'єктивну базу знань й умінь суб'єктів учіння з математики, котру вони вже повинні засвоїти згідно навчальних планів і програм. Тому не було особливої потреби описувати окремо алгоритми у вигляді певного рівня узагальнення дій і з урахуванням можливостей виконання цих дій у Maple.

Робота в Maple дає змогу в діалогову режимі вести пошук можливостей розв'язування задачі. По суті проводився комп'ютерний експеримент, котрий виконати вручну практично неможливо.

Ефективне застосування Maple чи інших ІКТ можливе тільки за наявності в суб'єктів викладання й учіння певної інформаційної культури. Такої ж культури вимагає і створення методик застосування ІКТ у навчанні математики, котрі обов'язково повинні ґрунтуватися на фундаментальних наукових підходах – діяльнісному, системному, технологічному, гуманістичному, синергетичному.

У наведених задачах інтегруються такі знання й уміння: конструктивної геометрії (побудова кіл дотичних до заданих), аналітичної геометрії (метод координат, рівняння кола, рівняння еліпсу, рівняння прямих), математичного моделювання (складання моделі), алгебри (розв'язування систем ірраціональних рівнянь), математичного аналізу (поняття послідовності і ряду, суми ряду, існування границі послідовності), інформатики (поняття алгоритму, програми, ІКТ, лінійні програми, програми з розгалуженням, цикли), обчислювальної математики (критерії точності обрахування, обрахування членів послідовності, частинних сум ряду з наперед визначеною точністю), Maple (оператори присвоєння, організація циклів, умовні оператори, списки тощо).

Задачі типу тих, що наведені вище, можуть входити до курсових, дипломних та магістерських робіт, індивідуальних чи групових проектів.

Стаття буде корисною вчителям і учням шкіл з поглибленим вивченням математики, викладачам і студентам технічних коледжів чи ліцеїв, ВНЗ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аладьев В.З. Основы программирования в Maple. – Таллин: 2006. – 301 с.
2. Биков В.Ю. Моделі організаційних систем відкритої освіти. – К.: «Атака». – 2009. –684 с.
3. Выготский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Физико-математической литературы, 1959. – 783 с.
4. Выготский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
5. Жалдак М.І. Математика (алгебра і початки аналізу) з коп'ютерною підтримкою / М.І. Жалдак, А.В. Грохольська, О.Б. Жильцов. – К.: МАУП, 2003. – 304 с.
6. Ковалев А.Г. Психология личности. – М.: Просвещение, 1970. – 391 с.
7. Кушнір В.А. Конструювання навчальних завдань з математики: математичні моделі, алгоритми, програми // Інноваційні технології в освіті. – Випуск 18. – 2014. – С. 030-041.
8. Кущнір В.А. Моделі навчальних ситуацій у світлі сучасної освіти // Математика в сучасній школі. – 2013. –№ 2. – С. 31 – 36.
9. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.: Издательство Московського университета. – 1975. – 344 с.
10. Фокин Ю.Г. Теория и технология обучения. – М.: Академия, 2006. – 240 с.
11. Шкіль М.І. Математичний аналіз. – Ч. 1. – К.: Вища школа, 1978. – 382 с.

Стаття надійшла до редакції 20.09.2014

Basil Kushnir
Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko State Pedagogical University, Kirovohrad, Ukraine

MATHEMATICAL PROBLEMS OF INTEGRATIVE CONTENTS

The tasks of integrative content requires the use of knowledge and skills on various themes both one discipline and different disciplines. Mostly in the classroom (or in homework) the tasks on the properties absorption of different concepts using different theories are considered. Thus knowledge within only one discipline is formed, knowledge of the narrow sense (one subject). Such knowledge is "prescriptional", we call it idealized. After all, it is far from models of the real professional problems and problems of life in general, in order to solve them it is necessary to apply knowledge and skills acquired in different themes of the same objects,life experience.

Practical formation of integrative knowledge requires statement of the educational problems before the subjects of studying, the problems within the "narrow objectivity" can not be resolved at all, or such kind of solving is too difficult to solve, for example, the nature and the context of solving problems (scientific approaches to solving problems, creating mathematical models, methods for solving such models, means of solving, application of methods, analysis of the models solution and the right choice, the inspection of solutions, etc.) will sink in the conglomeration of technical operations.

The problems with integrative content are usually more complicated than the problems of "narrow objectivity." In our problems the index of such difficulty is the essence of educational content, which is disclosed in the previous paragraph.

The problems solution proposed in this article requires knowledge of the structural geometry (circle construction, touching two or three laps): with analytic geometry (method of coordinates on the plane; the distance between two points on the coordinate plane); algebra (system drawing irrational equations, method for solving such system, the solution of the system, analysis of the results and the right choose of the desired solution for found criterion, testing of the solution system, the notion of vector and its coordinates); on mathematical analysis and algebra in school course with advanced study of mathematics or specialized colleges (concept of infinite numerical sequence and its convergence, the rules of convergence in infinite sequences of numbers, the concept of numerical range and its convergence, the rules of numerical series convergence, calculations of members of infinite and partial sums of the numerical series with pre-specified accuracy); with Maple (organization of linear programs, organization of cycles, conditional branches, the concept of sets and lists and work with them, solving systems of nonlinear equations, the construction of drawings in program mode, the syntax of Maple, creation of the program in accordance with the method of solving the problem in general, the mathematical model and its solution method, criterion for selection of the desired solution models, conditions and parameters of the original problem.

Solving problems of the integrative content forms integrative knowledge as knowledge of a higher level compared with a simple set of one discipline knowledge, develops search and research skills, creativity, generates creative potential, mathematical and information culture of a subject of study. Such problems are not resolved by typical methods and the same typical algorithms, it is necessary to find a way to create a solution and the corresponding algorithm for each of them.

Key words: problems of integrative content, integrative knowledge, mathematical model of the problem, the content of educational problem, program in Maple, algorithm, program.

Кушнир В.А.
Кировоградский государственный педагогический университет им. В. Винниченко, Кировоград, Украина

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ ИНТЕГРАТИВНОГО СОДЕРЖАНИЯ

Задачи интегративного содержания требуют применение знаний и умений с различных тем как одной учебной дисциплины, так и с различных. В большинстве на

занятиях (или в домашних заданиях) рассматриваются задания на усвоение различных свойств понятий, применения при этом соответствующих теорем. В такой способ формируются однопредметные знания к тому же еще и узкого содержания (с одной темы). Такие знания мы называем «рецептурными», идеализированными. Ведь они достаточно далеки от моделей реальных профессиональных проблем и проблем жизни вообще, для решения которых нужно применить знания и умения, полученные в разных темах одного учебного предмета, разных предметов, жизненного опыта.

Для практического формирования интегративных знаний нужно перед субъектами учения ставить учебные проблемы, которые в рамках «узкой предметности» не могут быть решены вообще или такое решение будет слишком сложным, а сущность и содержание решения проблемы (научные подходы к решению задачи, создание математических моделей, способы решения таких моделей, средства решения, методики применения средств, анализ решений моделей и выбор нужных, проведение проверки решений и т.п.) утонет в лавине исполнения технических операций.

Задачи интегративного содержания, как правило, сложнее задач «узкой предметности». В наших задачах показателями такой сложности является само содержание задачи, которое раскрыто в предыдущем абзаце. Такие задачи не решаются типовыми способами по таким же типовым алгоритмам, для каждой из них требуется найти свой способ решения и создать соответствующий ему алгоритм.

Решения предложенных в этой статье задач требует знаний с конструктивной геометрии (построение окружности, касающейся трех или двух окружностей); с аналитической геометрии (метод координат на плоскости, расстояние между двумя точками на координатной плоскости); с алгебры (составление систем иррационалных уравнений, способы решения таких систем, решение систем, анализ результатов и выбор нужного решения по найденному критерию, проверка решений системы уравнений, понятие вектора и его координат); с математического анализа или алгебры в курсе школ с углубленным изучением математики и специализированных колледжей (понятие бесконечной числовой последовательности и ее сходимости, правила сходимости бесконечной последовательности чисел, понятие числового ряда и его сходимости, правила сходимости числового ряда, вычисление членов бесконечной сходящейся последовательности чисел и частичных сум числового ряда с наперед определенной точностью); с Maple (организация линейных программ, циклов, условных переходов; понятие множества и списков и работа с ними, решение систем нелинейных уравнений, построение рисунков в программном режиме, часть синтаксиса Maple, составление программы соответственно способу решения задачи, математической модели и способу ее решения, критерия выбора нужного решения модели, условий и параметров исходных задач, отладка программы, выполнение программы).

Решение задач интегративного содержания формирует интегративные знания как знания более высокого уровня по сравнению с простой совокупностью однопредметных знаний, развивает поисково-исследовательские, творческие способности, формирует творческий потенциал, математическую и информационную культуру субъектов учения.

Ключевые слова: задачи интегративного содержания, интегративные знания, математическая модель задачи, содержание учебной проблемы, программа в Maple, алгоритм, программа.