УДК 004:37

Кушнір В.А.
Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка,
Кіровоград, Україна

КОНСТРУЮВАНННЯ НАВЧАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ: МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, АЛГОРИТМИ, ПРОГРАМИ.

DOI:10.14308/ite000464

Проблема формування в майбутніх і нинішніх учителів математики інтегративних знань як знань більш високого рівня в порівнянні зі знаннями окремих предметів (математики й інформатики) зводиться до розв'язування певних навчальних ситуацій, що вимагають одночасного застосування знань й умінь різних предметів. До таких проблем відноситься проблема автоматизованого конструювання навчальних завдань певного виду із заздалегідь визначеними властивостями. В основі розв'язування цієї проблеми лежить створення математичної моделі потрібного математичного об'єкту, її дослідження та розв'язування.

Математична модель визначеного виду навчального завдання містить певну множину параметрів, а підбір значень цих параметрів визначає потрібні властивості навчального завдання. У свою чергу, властивості навчального завдання в процесі їх формалізації перетворюються в певні умови, наприклад, у вигляді рівнянь чи нерівностей. Формалізація сукупності заданих властивостей шуканого математичного завдання приводить до системи рівнянь і нерівностей. Отже, наша задача зводиться до побудови математичної моделі у вигляді системи рівнянь і нерівностей.

Перший варіант математичної моделі потрібно дослідити на несуперечність, повноту, мінімальність умов. Після корегування (зміни, вилучення чи додавання певних умов) математична модель підлягає розв'язуванню, тобто пошуку потрібних значень параметрів. Такий процес називається розв'язуванням математичної моделі, спосіб розв'язування знаходиться чи створюється автором математичної моделі.

Математичні моделі конструювання навчальних завдань з математики створюються у такий спосіб, що розв'язками математичної моделі будуть попередньо обрані числа, наприклад, цілі числа з певного проміжку. Різні вектори-розв'язки математичної моделі визначають конкретні приклади з певного типу прикладів. У нашій статті конструюється неперервна дробово-раціональна функція з точно двома екстремумами. При цьому розглядаються наукові підходи та способи розв'язування математичної моделі. По суті описується пошук прийнятного способу розв'язування математичної моделі у вигляді системи рівнянь і нерівностей.

На основі способу розв'язування моделі створюються алгоритми та програми на мові Maple для автоматизації процесу розв'язування моделі. При цьому розв'язки моделі генеруються попередньо за вибором користувача. Різні вектори-розв'язки математичної моделі визначають різні математичні завдання одного типу.

У статті описаний загальний підхід, розроблений автором, до створення й розв'язування математичної моделі задачі конструювання певної функції. Однак, наведена авторська технологія конструювання однаково добре працює при конструюванні многочленів з певною кількістю екстремумів, різного типу ірраціональних, логарифмічних рівнянь і нерівностей, систем лінійних рівнянь, матриць з наперед заданими власними значеннями, дробово-раціональних рівнянь і нерівностей і т.д.

Ключові слова: *інтегративні знання, математичний об'єкт, математична модель, розв'язок математичної моделі, основні етапи створення математичних моделей, спосіб розв'язування моделі, алгоритм, програма.*

Інформатизація навчальних закладів усіх рівнів надає можливість використовувати різні ІКТ-технології у навчальному процесі: побудова графіків функцій, діаграм, геометричних тіл і їх складних перерізів, виконання великої кількості операцій у складних обчисленнях і перетвореннях. Відомий вчений Биков В.Ю. зазначає: «Проникнення ІКТ у навчальний процес створює передумови для кардинального оновлення як змістовно-цільових, так і технологічних сторін навчання, що виявляється у суттєвому збагаченні системи дидактичних прийомів, засобів навчання і на цій основі – у формуванні нетрадиційних педагогічних технологій, застосованих на використанні комп'ютерів» [1, с. 141]. Особливо важливим є поява ІКТ з можливостями символьного обчислення, що дозволяє виконувати різні перетворення й точні обчислення. У статті показані можливості Maple-технології в автоматичному конструюванні завдань з математики в контексті такого конструювання на основі математичного моделювання.

Метою дослідження є конструювання навчальних завдань з математики на основі математичного моделювання з використанням ІКТ.

Завданнями дослідження є виокремлення та дослідження основних етапів процесу конструювання навчальних завдань з математики з використанням Maple.

Об'єктом дослідження виступає процес конструювання навчальних завдань з математики.

Предметом дослідження є процес створення, дослідження й розв'язування математичної моделі задачі конструювання математичного об'єкту певного виду з наперед визначеними властивостями з використанням Maple-технології.

Традиційний підхід до навчання, зокрема й у профільних школах та коледжах математичного спрямування, переважно орієнтується на формування в учнів та студентів знань і умінь окремих предметів, однак інтегративним знанням приділяється менше уваги. З іншого боку, сучасний випускник (майбутній спеціаліст) повинен володіти «складними здібностями», до яких відносяться і здібності щодо використання знань різних навчальних дисциплін у розв'язанні тих чи інших задач, зокрема й практичного спрямування. Для розв'язування наведеної суперечності й формування інтегративних знань пропонуємо конструктивні задачі, котрі вимагають інтеграції знань як у межах одного предмету, так і різних предметів (математики й інформатики). Такі інтегративні знання необхідні майбутнім математикам, фізикам, інженерам, економістам і т.п. при конструюванні об'єктів, в тому числі й математичних, визначеного виду та із заздалегідь визначеними властивостями. При цьому можуть виникати задачі як визначення самого виду майбутнього об'єкту, так і методів та способів його конструювання. Стаття є подальшим розвитком ідей, котрі висвітлені у працях [1-4], є певним підсумком багаторічної праці автора в напрямку задач конструювання математичних об'єктів, результатами якої є надруковані статті (більше 15) в центральних методичних виданнях. Шуканий математичний об'єкт буде характеризуватися множиною Ω певних параметрів (невідомих), а конкретні числові значення цих параметрів будуть визначати конкретний математичний об'єкт визначеного виду.

У задачі конструювання математичних об'єктів визначеного виду з множиною параметрів Ω провідну роль відіграє ***метод математичного моделювання***, тобто задача конструювання визначеного математичного об'єкту зводиться до створення математичної моделі цього об'єкту, котра буде містити множину Ω параметрів (невідомих), а відшукування числових значень цих невідомих, які задовольнятимуть математичну модель, будемо називати ***розв'язком моделі***. Числові значення параметрів математичного об'єкту й будуть визначати сам шуканий об'єкт. Тоді загалом процес створення математичного об'єкту (у нашому випадку дробово-раціональної функції) буде зводитися до: **1)** вибору чи створення наукового підходу до розробки математичної моделі задачі. Зауважимо, що на сьогодні в науковій літературі під науковим підходом розуміють сукупність методів, способів, прийомів у вивченні чогось, причому така сукупність окреслюється певною ідеєю, концепцією, принципом [7]; **2)** створення на основі обраного наукового підходу математичної моделі задачі конструювання математичного об'єкту (наприклад, у вигляді системи рівнянь і нерівностей); **3)** дослідження і корегування математичної моделі (можливе вилучення чи добавлення окремих елементів математичної моделі, наприклад, рівнянь чи нерівностей); **4)** розробка чи вибір наукового підходу до створення можливих способів розв'язування математичної моделі; **5)** створення на основі запропонованого наукового підходу способу розв'язування математичної моделі; **6)** створення алгоритму розв'язування математичної моделі відповідно запропонованого способу; **7)** визначення найбільш доцільної мови програмування і створення на ній програми відповідно алгоритму розв'язування математичної моделі; **8)** налагодження програми й обрахунки за її допомогою та отримання достатньої кількості математичних об'єктів з різними значеннями параметрів, котрі задовольняють умовам задачі конструювання.

Насамперед, потрібно чітко сформулювати задачу конструювання в автоматизованому режимі математичного об'єкту визначеного вигляду. Для нашого випадку така задача формулюється так.

Задача. Сконструювати дробово-раціональну функцію виду

$$y = \frac{a1 \cdot x^2 + b1 \cdot x + c1}{a2 \cdot x^2 + b2 \cdot x + c2}\ , \qquad (1)$$

котра має властивості: 1) функція неперервна; 2) функція має два екстремуми.

По суті, задача полягає у визначенні значень коефіцієнтів $a1, b1, c1, a2, b2, c2$ (множина параметрів Ω) у функції (1) з тим, щоб виконувалися умови: 1) функція (1) неперервна і 2) має точно два екстремуми.

Опишемо процес створення моделі задачі конструювання дробово-раціональної функції більш детально, відповідно до наведеного вище плану розв'язування задач конструювання математичних об'єктів із заздалегідь визначеними властивостями.

1. ***Науковий підхід*** до створення математичної моделі (моделі, з якої будуть визначені значення параметрів $a1, b1, c1, a2, b2, c2$ за умов 1) і 2)) полягає в тому, що: по-перше, функція (1) буде неперервна, якщо її знаменник не рівний нулю (умова неперервності дробово-раціональної функції), що, у свою чергу, буде виконуватися за умови

$$b2^2 - 4a2 \cdot b2 < 0; \qquad (2)$$

по-друге, будуть виконуватися необхідні й достатні умови існування тільки двох екстремумів функції виду (1) (спосіб відшукання екстремумів функцій).

2.***Створення моделі.*** Виходячи з попереднього пункту і виду функції (1) для відшукання екстремуму функції знаходимо її похідну, яка після перетворень набуде вигляду

$$y' = \frac{(a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1) \cdot x^2 + 2(a1 \cdot c2 - a2 \cdot c1) \cdot x + (b1 \cdot c2 - b2 \cdot c1)}{(a2 \cdot x^2 + b2 \cdot x + c2)^2} \qquad (3)$$

і прирівнюємо її до нуля, тобто, чисельник (3) повинен рівнятися нулю

$$(a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1) \cdot x^2 + (a1 \cdot c2 - a2 \cdot c1) \cdot x + (b1 \cdot c2 - b2 \cdot c1) = 0. \qquad (4)$$

Відомо, що квадратне рівняння (4) матиме два корені, якщо дискримінант

$$D = 4(a1 \cdot c2 - a2 \cdot c1)^2 - 4 \cdot (a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1) \cdot (b1 \cdot c2 - b2 \cdot c1) > 0. \qquad (5)$$

Отже, математичною моделлю нашої задачі конструювання може бути система нерівностей (2) і (5), розв'язок якої дасть числові значення параметрів $a1, b1, c1, a2, b2, c2$

$$\begin{cases} b2^2 - 4a2 \cdot c2 < 0 \\ 4(a1 \cdot c2 - a2 \cdot c1)^2 - 4 \cdot (a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1) \cdot (b1 \cdot c2 - b2 \cdot c1) > 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Можна показати (хоча для цього потрібно ще створити спосіб розв'язування цієї системи!), що система нерівностей (6) має безліч розв'язків. Однак, при цьому дискримінант (5) не обов'язково буде точним квадратом якогось числа, а значить розв'язками рівняння (4) будуть переважно ірраціональні вирази (імовірність того, що розв'язок нерівності (5) буде точним квадратом деякого раціонального числа досить мала), що на практиці досить незручно, наприклад, при відшуканні значень максиму чи мінімуму функції (1). Тому в умову задачі потрібно додати ще одну умову: 3) точки, в котрих функція (1) має екстремум повинні бути цілими чи раціональними числами. Тоді умови 2) – «точок екстремуму рівно дві різні» і 3) – «ці точки раціональні чи цілі числа» можна математично змоделювати замінивши другу нерівність у моделі (6) на два рівняння і нерівність

$$\begin{cases} (a1\cdot b2-a2\cdot b1)\cdot x1^2+2\cdot(a1\cdot c2-a2\cdot c1)\cdot x1+(b1\cdot c2-b2\cdot c1)=0 \\ (a1\cdot b2-a2\cdot b1)* x2^2+2\cdot(a1\cdot c2-a2\cdot c1)\cdot x2+(b1\cdot c2-b2\cdot c1)=0 \\ b2^2-4\cdot a2\cdot c2<0 \\ x1\neq x2 \\ a2\cdot b2\cdot c2\neq 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Перші два рівняння і четверта нерівність у моделі (7) забезпечують існування у функції (1) двох різних точок екстремуму (достатня умова тут виконується автоматично, оскільки рівняння (4) квадратне і має два різні корені $x1, x2$), третя нерівність забезпечує неперервність функції (1), а остання нерівність виключає спрощені варіанти функції (1). Суттєвим є те, що у моделі (7) добавилося два нових невідомих $x1, x2$. Таким чином, у моделі (7) уже вісім невідомих, значення яких і потрібно визначити із цієї моделі.

3.*Науковий підхід до створення способу розв'язування математичної моделі (7)* , запропонований нами, полягає у: 1) розв'язуванні двох перших рівнянь моделі (7), при цьому вільні змінні вибирають так, щоб система ставала якомога простішою, з нелінійної у нашому випадку перетворилася в лінійну з єдиним розв'язком (ідея); 2) перевірці, чи задовольняє розв'язок нерівностям моделі (7) (спосіб розв'язування змішаної системи).

4.*Спосіб розв'язування моделі.* Оскільки перші два нелінійні рівняння моделі (7) мають вісім невідомих, то шість із них можна вибрати довільно. Наприклад, оберемо довільно $x1, x2$ такими, що $x1\neq x2$, обираємо $a2, b2, c2, c1$ довільні не нульові, а $a1, b1$ знаходимо з отриманої системи уже лінійних рівнянь відносно $a1, b1$. ***Важливим у виборі «вільних» невідомих є спрямованість на спрощення нелінійної системи двох рівнянь моделі (7) аж до лінійної системи***. Потім перевіряємо виконання третьої нерівності моделі (7). Якщо розв'язок задовольняє третю нерівність моделі (7), то отримали перший варіант шуканої функції (1), якщо ні – повторюємо процес спочатку.

5.*Алгоритм розв'язування моделі (7)* можна запропонувати такий.

1) генеруємо цілі числа $x1, x2\in[-4..4]\wedge x1\neq x2$;

2) генеруємо $a2, b2, c2, c1\in[-4..4]\wedge b2^2-4\cdot a2\cdot b2<0\wedge c1\cdot a2\cdot b2\cdot c2\neq 0$;

3) розв'язуємо лінійну відносно $a1, b1$ систему

$$\begin{cases} (b2\cdot x1^2+2\cdot c2\cdot x1)\cdot a1+(c2-a2\cdot x1^2)\cdot b1=2\cdot a2\cdot c1\cdot x1+b2\cdot c1 \\ (b2\cdot x2^2+2\cdot c2\cdot x2)\cdot a1+(c2-a2\cdot x2^2)\cdot b1=2\cdot a2\cdot c1\cdot x2+b2\cdot c1 \end{cases}. \quad (8)$$

Для відшукання розв'язку системи (8) скористаємося формулами Крамера. Для цього в середовищі Maple розкриємо головний M та допоміжні $M1, M2$ визначники системи (8).

\>

$with(LinearAlgebra):$

$$M := factor\left(Determinant\left(\begin{bmatrix} b2\cdot x1^2+2\cdot c2\cdot x1 & c2-a2\cdot x1^2 \\ b2\cdot x2^2+2\cdot c2\cdot x2 & c2-a2\cdot x2^2 \end{bmatrix}\right)\right);$$

$$M1 := factor\left(Determinant\left(\begin{bmatrix} 2\cdot c1\cdot a2\cdot x1+b2\cdot c1 & c2-a2\cdot x1^2 \\ 2\cdot c1\cdot a2\cdot x2+b2\cdot c1 & c2-a2\cdot x2^2 \end{bmatrix}\right)\right);$$

$$M2 := factor(Determinant([[b2\cdot x1^2+2\cdot c2\cdot x1, 2\cdot c1\cdot a2\cdot x1+b2\cdot c1], [b2\cdot x2^2+2\cdot c2\cdot x2, 2\cdot c1\cdot a2\cdot x2+b2\cdot c1]]));$$

$$M := (-x2+x1)\,c2\,(2\,c2+x1\,b2+2\,x1\,a2\,x2+x2\,b2)$$
$$M1 := a2\,c1\,(-x2+x1)\,(2\,c2+x1\,b2+2\,x1\,a2\,x2+x2\,b2). \quad (9)$$

$$M2 := b2\,c1\,(-x2 + x1)\,(2\,c2 + x1\,b2 + 2\,x1\,a2\,x2 + x2\,b2)$$

Поставимо вимогу, щоб головний визначник системи (8) $M \neq 0$. Тоді, згідно (9), повинно бути (оскільки $c2 \neq 0$, $x1 \neq x2$ згідно моделі (7))

$$2 \cdot c2 + x1 \cdot b2 + 2 \cdot x1 \cdot x2 \cdot a2 + x2 \cdot b1 \neq 0. \quad (10)$$

Згідно правил Крамера отримаємо

$$a1 = \frac{M1}{M} = a2 \cdot \frac{c1}{c2}, \; b1 = \frac{M2}{M} = b2 \cdot \frac{c1}{c2}. \quad (11)$$

Підставивши значення (11) для $a1$, $b1$ в (1), після простих перетворень отримаємо, що $y = c1$, що не відповідає постановці нашої задачі (функція не буде дробово-раціональною).

Отже, випадок виконання умови (10) і відповідної умови $M1 \neq 0$ не підходить. Тоді потрібно накласти таку умову

$$2 \cdot c2 + x1 \cdot b2 + 2 \cdot x1 \cdot x2 \cdot a2 + x2 \cdot b1 = 0, \quad (12)$$

котра рівносильна умові

$$c2 = -\frac{1}{2}(x1 \cdot b2 + 2 \cdot x1 \cdot x2 \cdot a2 + x2 \cdot b1). \quad (13)$$

Отже, у модель (7) потрібно внести зміни, коли $c2$ буде визначатися за формулою (13), а не генеруватися довільно.

Покладемо у першому рівнянні системи (8) значення $c2$ із (13). Після перетворень у Maple 15, маємо:

```
> c2 := -(x1·b2 + x2·b2 + 2 x1·x2·a2)/2 :
b1 := factor(expand(1/(c2 - a2·x1^2) (2 c1·a2·x1 + b2·c1 - (b2·x1^2 + 2 c2·x1)·a1))) :
print('b1'= b1) :
```

$$b1 = -\frac{2\,(c1 + a1\,x1\,x2)}{x1 + x2} \quad (14)$$

Звідси випливає, що у математичну модель (7) потрібно ще додати умови

$$c2 - a2 \cdot x1^2 \neq 0 \;\; i \;\; x1 + x2 \neq 0. \quad (15)$$

Значення $a1$ вибираємо довільно. Тоді математична модель задачі конструювання неперервної дробово-раціональної функції виду (1) з двома різними екстремумами набуде вигляду

$$\begin{cases} (a1 \cdot b2 - b1 \cdot a2) \cdot x1^2 + 2(a1 \cdot c2 - a2 \cdot c1) \cdot x1 + (b1 \cdot c2 - b2 \cdot c1) = 0 \\ (a1 \cdot b2 - b1 \cdot a2) \cdot x2^2 + 2(a1 \cdot c2 - a2 \cdot c1) \cdot x + (b1 \cdot c2 - b2 \cdot c1) = 0 \\ x1 \neq x2 \wedge x1 \neq -x2 \\ b2^2 - 4 \cdot a2 \cdot c2 < 0 \\ c1 \cdot a2 \cdot b2 \cdot c2 \neq 0 \\ 2 \cdot c2 + x1 \cdot b2 + 2 \cdot x1 \cdot a2 \cdot x2 + x2 \cdot b2 = 0 \\ c2 - a2 \cdot x2^2 \neq 0 \end{cases}. \quad (16)$$

Отже, в результаті реалізації способу розв'язування моделі (створенні алгоритму) виявилося, що потрібно змінити саму математичну модель (7) задачі конструювання неперервної функції виду (1) з двома екстремумами на нову модель (16). Зрозуміло, що зміниться й алгоритм розв'язування моделі.

5а. ***Алгоритм розв'язування математичної моделі (16).***

1) Генеруємо випадковим чином цілі $x1,\ x2 \in [-4..4]$ поки не виконається умова $(x1 - x2) \cdot (x1 + x2) \neq 0$;

2) Генеруємо випадковим чином цілі $a1,\ c1 \in [-4..4]$ поки не виконається умова $a1 \cdot c1 \neq 0$;

3) Генеруємо випадковим чином цілі числа $a2,\ b2 \in [-4..4]$ поки не виконається умова $a2 \cdot b2 \neq 0$;

4) Знаходимо $c2 = -\dfrac{x1 \cdot b2 + x2 \cdot b2 + 2 \cdot x1 \cdot x2 \cdot a2}{2}$;

5) Знаходимо $b1 = -\dfrac{2\,(c1 + a1\,x1\,x2)}{x1 + x2}$;

6) Якщо виконується умова

$$a1 \cdot b1 \cdot c1 \cdot a2 \cdot b2 \cdot c2 \neq 0 \wedge b2^2 - 4 \cdot a2 \cdot c2 < 0 \wedge$$
$$a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1 \neq 0 \wedge (x1 + x2) \cdot (x1 - x2) \neq 0$$

то перший варіант розв'язку математичної моделі (16) знайдено і тим самим визначена неперервна функція виду (1) з двома екстремальними точками; якщо ж наведена умова не виконується, то йти до пункту 1) алгоритму розв'язування моделі (16);

7) Якщо потрібні ще нові варіанти розв'язку моделі (16), то йти до пункту 1).

Зауважимо, що імовірності виконання нерівностей-умов у пунктах 1), 2), 3) досить високі, адже імовірності настання протилежних подій (рівності нулю) рівні, як легко обрахувати $\dfrac{17}{81}$, тоді ймовірності виконання нерівностей $1 - \dfrac{17}{81} = \dfrac{64}{81} \approx 0{,}8$. Ймовірності не нульових значень $c2 \neq 0,\ b1 \neq 0$, що визначаються в пунктах 4) і 5) визначаються складно. Однак з урахуванням випадкової генерації $x1, x2, b2,\ a2,\ a1,\ c1$ як цілих чисел із проміжку $[-4..4]$ цілком очевидно, що ймовірності не нульових значень $c2$ *і* $b1$ досить великі. Складна умова пункту 6) дещо переобтяжлива, оскільки деякі складові цієї умови вже виконані в попередніх пунктах алгоритму. Однак з методичної точки зору ці всі умови доцільно об'єднати в одну. Запропонований нами алгоритм не повністю детермінований, що виявляється у «відбиранні» потрібних варіантів розв'язків, а не в чіткому (детермінованому) алгоритмі їх визначення. Однак в автоматизованому варіанті відбору з урахуванням досить високих ймовірностей виконання нерівностей в алгоритмі таке «відбирання» цілком слушне. Алгоритм же й відповідна програма при такому підході (не повної детермінації) будуть дещо простішими й зрозумілішими. Окрім цього, такий підхід буде формувати не тільки детерміноване мислення учня чи студента, а й імовірнісне та наочно демонструвати переваги швидких можливостей комп'ютерів та інформаційно-комунікаційних технологій, особливо у випадку створення значної кількості однотипних математичних об'єктів. Наближену імовірність появи «потрібного» прикладу можна обрахувати статистичними методами.

6. Оскільки ми шукаємо точні розв'язки моделі (16), то ***мовою програмування*** ми вибрали Maple 15, котра має можливості точного (символьного) обчислення. Сама програма згідно алгоритму може виглядіти такою.

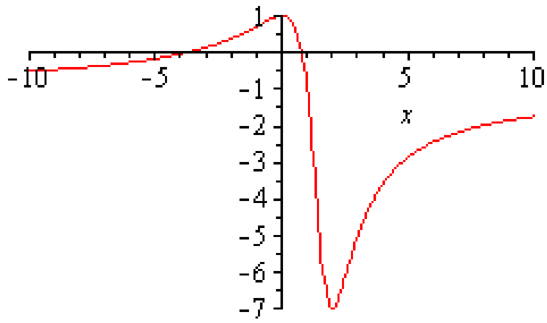
Програма 1.

>

$with(LinearAlgebra):$
$z := rand(-3..3) : i := 1 : j := 30 :$
while $i \le j$ **do**
$unassign('a1','a2','b1','b2','c1','c2','x1','x2'):$
$x1 := z() : x2 := z() :$
while $(x1 - x2)\cdot(x1 + x2) = 0$ **do** $x1 := z() : x2 := z() :$ **end do**:
$c1 := z() : a1 := z() :$ **while** $c1\cdot a1 = 0$ **do** $c1 := z() : a1 := z()$ **end do**:
$a2 := z() : b2 := z() :$ **while** $a2\cdot b2 = 0$ **do** $a2 := z() : b2 := z()$ **end do**:
$c2 := -a2\,x1\,x2 - \frac{1}{2}\,x1\,b2 - \frac{1}{2}\,b2\,x2 :$
$b1 := \frac{-2\cdot x1\cdot x2\cdot a1 - 2\cdot c1}{x1 + x2};$
if $a1\cdot b1\cdot c1\cdot a2\cdot b2\cdot c2\cdot(x1 - x2)\cdot(x1 + x2)\cdot(a1\cdot b2 - b1\cdot a2) \neq 0$ **and** $b2^2 - 4\cdot a2\cdot c2 < 0$ **then**
$y1 := \frac{a1\cdot x1^2 + b1\cdot x1 + c1}{a2\cdot x1^2 + b2\cdot x1 + c2} : y2 := \frac{a1\cdot x2^2 + b1\cdot x2 + c1}{a2\cdot x2^2 + b2\cdot x2 + c2} :$
$print(i - 1\,'варіант'):$
$print\left('y'= \frac{a1\cdot x^2 + b1\cdot x + c1}{a2\cdot x^2 + b2\cdot x + c2}, 'x1'= x1, 'y1'= y1, 'x2'= x2, 'y2'= y2\right):$
$print\left(plot\left(\frac{a1\cdot x^2 + b1\cdot x + c1}{a2\cdot x^2 + b2\cdot x + c2}\right)\right) : i := i + 1$ **end if**: **end do**:

$1 - варіант$

$$y = \frac{x^2 + 3x - 3}{-x^2 + 3x - 3}, x1 = 0, y1 = 1, x2 = 2, y2 = -7$$



$2 - варіант$

$$y = \frac{x^2 - 5x - 2}{2x^2 + x + 7}, x1 = -3, y1 = 1, x2 = 1, y2 = -\frac{3}{5}$$

$3 - варіант$

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 + 2x + 7}, x1 = 3, y1 = \frac{2}{5}, x2 = -1, y2 = 0$$

$4 - варіант$

$$y = \frac{x^2 + \frac{4}{3}x + 2}{3x^2 + x + \frac{3}{2}}, x1 = 0, y1 = \frac{4}{3}, x2 = -3, y2 = \frac{14}{51}$$

$5 - варіант$

$$y = \frac{-2x^2 - 20x - 2}{-3x^2 - 2x - 17}, x1 = 3, y1 = \frac{8}{5}, x2 = -2, y2 = -\frac{6}{5}$$

6 — варіант

$$y = \frac{3x^2 + 42x - 3}{2x^2 + 2x + 11}, x1 = -2, y1 = -5, x2 = 3, y2 = \frac{30}{7}$$

7 — варіант

$$y = \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 + 3x + 6}, x1 = 1, y1 = 0, x2 = -3, y2 = 8$$

8 — варіант

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{-x^2 - 3x - \frac{9}{2}}, x1 = 0, y1 = \frac{2}{3}, x2 = -3, y2 = -\frac{8}{3}$$

9 — варіант

$$y = \frac{2x^2 - 7x - 1}{-3x^2 + x - 8}, x1 = 1, y1 = \frac{3}{5}, x2 = -3, y2 = -1$$

10 — варіант

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 2x + 11}, x1 = -3, y1 = \frac{1}{2}, x2 = 1, y2 = 0$$

>

Для першого варіанту ми показали ще й графік відповідної знайденої функції.

Зауважимо, що досить значна кількість умов у програмі зменшує ймовірність появи «потрібного» прикладу (неперервної дробово-раціональної функції з двома екстремумами), котру наближено можна обрахувати статистичними методами. Однак швидкість обрахунків за допомогою комп'ютера робить отримання результатів роботи програми за цілком прийнятий час.

Задачі конструювання математичних об'єктів, в основі якого лежить створення математичних моделей, є новими аспектами вивчення понять екстремумів функцій, що є ***суттєвим розгортанням проблеми формування цих понять та проблеми практичного відшукання екстремумів функцій однієї змінної***.

Потрібно зазначити, що задачі конструювання математичних об'єктів не вимагають ніяких нових знань, а вимагають лише їх творчого інтегративного застосування. Саме навчальна проблема конструювання математичних об'єктів стає фокусом формування інтегративних знань і умінь різного обсягу й різної структурної складності. Більше того, задачі й відповідні моделі конструювання математичних об'єктів можуть бути й досить простими. Для прикладу розглянемо таку задачу.

Задача. Сконструювати квадратне рівняння

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \tag{17}$$

котре мало б два різні дійсні корені $x1 \neq x2$.

Розв'язування. Однією з можливих математичних моделей може бути нерівність

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0, \tag{18}$$

розв'язок якої знайти відносно просто, ним буде трійка чисел a, b, c Друга можлива модель задачі конструювання може ґрунтуватися на теремі Вієта і тоді математичною моделлю буде

$$x^2 - (x1 + x2) \cdot x + x1 \cdot x2 = 0, \tag{19}$$

де $x1 \neq x2$ вибрані довільно числа. В основу третьої моделі можна покласти властивість розкладу квадратного тричлена на множники, отримаємо модель

$$a \cdot (x - x1) \cdot (x - x2) = 0, \tag{20}$$

де $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}1, \boldsymbol{x}2$ довільні вибрані числа, причому $\boldsymbol{x}1 \neq \boldsymbol{x}2$.

Моделі (18)–(20) задовольняють умові задачі. Однак, квадратні рівняння, побудовані на основі моделі (18) матимуть здебільше ірраціональні корені, що не завжди зручно з методичних позицій, а рівняння (19) і (20) визначаються однозначно, якщо задамо корені $\boldsymbol{x}1$ $\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{x}2$. Більш загальною математичною моделлю конструювання квадратних рівнянь буде система

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}1^2 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}1 + \boldsymbol{c} = 0 \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}2^2 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}2 + \boldsymbol{c} = 0 \\ \qquad \boldsymbol{x}1 \neq \boldsymbol{x}2 \end{cases} \tag{21}$$

з п'ятьма невідомими $\boldsymbol{x}1, \boldsymbol{x}2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Для розв'язання моделі (21) виберемо довільними $\boldsymbol{x}1, \boldsymbol{x}2, \boldsymbol{a}$, тоді $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ з перших двох уже лінійних рівнянь визначаться однозначно. Якщо при цьому $\boldsymbol{x}1 \neq \boldsymbol{x}2$, то задача розв'язана.

У статті описаний авторський підхід, котрий реалізований у вигляді технології, до створення й розв'язування математичної моделі задачі конструювання неперервної дробово-раціональної функції, котра має два екстремуми. Однак, наведена авторська технологія конструювання навчальних завдань з математики однаково добре працює при конструюванні многочленів з певною кількістю екстремумів, різного типу ірраціональних, логарифмічних, дробово-раціональних рівнянь і нерівностей, рівнянь і нерівностей з модулями й параметрами, систем лінійних рівнянь, матриць з наперед заданими власними значеннями, дробово-раціональних функцій з розривами різних типів, неперервних дробово-раціональних функцій з наперед визначеними рівняннями похилих асимптот і т.д., з чого є відповідні наукові статті.

Задачі конструювання математичних об'єктів з заздалегідь визначеними властивостями мають згідно [2] високу ступінь невизначеності, а значить і проблемності й вимагають від суб'єктів учіння творчості. Тому їх можна використовувати як теми індивідуальних чи групових проектів для учнів чи студентів, задачі пошуково-дослідницького характеру, теми на факультативах та математичних гуртках, проблемних групах, індивідуальних робіт, спецкурсах у ВНЗ тощо.

Матеріал статті доповідався на конференціях різного рівня, апробований в коледжі й гімназії з поглибленим вивченням математики й інформатики, є складовою частиною спецкурсу «Вибрані питання математики» для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» і «спеціаліст» фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка. На протязі 4-5 років курс освоювали більше трьохсот студентів, виявили добрі й відмінні знання (більше 50%), решта – задовільно. Зауважимо, що оцінку «задовільно» студент міг отримати виконавши тільки половину завдань та ще й полегшеного змісту. Заняття спецкурсу, знання студентів неодноразово перевірялися на рівні кафедри, деканату й університету. Незадовільних оцінок після повторного складання не було.

Матеріал буде корисним вчителям, викладачам, учням профільних шкіл та студентам коледжів з поглибленим вивченням математики та інформатики, методистам з математики й інформатики, а також викладачам і студентам вищих педагогічних, технічних та економічних навчальних закладів. Для більш допитливих читачів рекомендуємо джерела [1-7].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Биков В. Ю. Моделі організаційних систем відкритої освіти/ В. Ю. Биков– К.: «Атака». – 2009. –684 с.
2. Кущнір В. А. Моделі навчальних ситуацій у світлі сучасної освіти/ В. А. Кущнір // Математика в сучасній школі. – 2013. –№ 2. – С. 31 – 36.
3. Кущнір В. А. Методика конструювання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з заздалегідь визначеним властивостями з використанням інформаційно-комунікаційних технологій (ч. 1,2) / В. А. Кущнір // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 10, № 11.

4. Кущнір В. А. Формування інтегративних знань з позицій структури навчальної діяльності/ В. А. Кущнір, Г. Кушнір // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 2. – С. 35-42.
5. Кушнір В. А. Технологія конструювання складних ірраціональних рівнянь певного виду/ В. А. Кущнір // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 7-8. – С. 39-44.
6. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников./ В. А. Крутецкий– М.:Просвещение, 1968. – 432 с.
7. Педагогіка вищої школи / За ред. З. Н. Курлянд. – К.: Знання, 2007. – 495 с.