УДК 681.3: 658.56.:004:37

Львов М. С.
Херсонский государственный университет, Херсон, Украина

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ

DOI:10.14308/ite000465

В работе представлен подход к построению системы тестирования процедурных геометрических знаний, т.е. знаний основных вычислительных формул и умений их применять. Этот подход заключается в построении математических моделей для каждого учебного модуля дисциплины геометрия. Основные объекты построения – шаблоны тестовых заданий – представляют собой математические модели тестов, задаваемые в общем виде. Шаблон класса однотипных тестовых заданий представлен геометрическим чертежом, системой формул-соотношений, связывающих элементы чертежа, шаблоном условием тестого задания и шаблоном ответа. Каждый такой шаблон используется как в алгоритмах генерации множества однотипных конкретных тестовых заданий, так и в алгоритмах автоматической проверки правильности ответов. Предлагаемый метод дает возможность описать относительно просто целый класс конкретных тестовых заданий. Важной особенностью системы является возможность автоматической проверки не только окончательного ответа, но и промежуточных формул ответа. Для реализации рассматриваемой системы тестирования необходимо использовать методы компьютерной алгебры и технологии алгебраического программирования.

Ключевые слова: *тестирование, среда тестирования, математические модели тестов, структурно-логические схемы (СЛС).*

Введение

Процесс обучения математике в средней школе включает как лекционную часть урока, так и активные формы обучения на уроке: практическую работу, самостоятельные и контрольные работы, и т.д. Таким образом, контролировать необходимо не только декларативные знания, но и *процедурные знания – знания методов решения задач*. Общие методы построения систем компьютерной математики учебного назначения, одной из подсистем которой является *Среда тестирования*, описаны в [1-5].

Математические тесты по геометрии, о которых будет идти речь, предназначены для контроля процедурных знаний по школьному курсу геометрии. Технологии контроля процедурных знаний исследованы и разработаны еще недостаточно. Таким образом, проблема исследования актуальна. В [6] описан общий подход к описанию предметных областей по математике и другим точным наукам. В [7] предложена методология построения систем тестирования процедурных математических знаний и ее уточнение для построения системы тестирования алгебраичечких знаний. В настоящей работе в рамках этого общего подхода рассмотрены особенности построения систем тестирования геометрических знаний. Предполагается, что система тестирования, содержащая геометрические тесты, будет реализована в модуле *Среда тестирования* системы компьютерной математики учебного назначения.(СКМУН) (см. [1-5]).

Проблему исследования настоящей работы можно сформулировать как *исследование функциональных требований, математических моделей и алгоритмов построения системы тестирования процедурных геометрических знаний в СКМУН.*

1. Формальное определение предметной области

Предметную область (онтологию) представляют структурно-логические схемы (СЛС). Эти онтологии представлены трехуровневой иерархией

«дисциплина» – « учебный модуль».

Наш подход заключается в том, что система тестовых заданий должна быть единой в рамках учебной дисциплины «Школьная геометрия». Однако ее разработка осуществляется поэтапно

Геометрия 7 – Геометрия 8 – Геометрия 9 – ….

В соответствии с общим подходом в данной онтологии определяется:

1. Учебный модуль – минимальная предметная область, для которой небходима разработка системы тестовых заданий как единый этап работ по построению общей системы тестирования.

2. Логически необходимая последовательность расширений системы тестовых заданий как этапов этих работ.

Анализ школьной учебной программы Украины по геометрии 7-9 позволяет выделить несколько учебных модулей, каждый из которых содержит одну или несколько тем учебной программы. Например:

Модуль 1. *Простейшие геометрические фигуры*

Простейшие геометрические фигуры и их свойства

Взаимное расположение прямых на плоскости

Модуль 2. *Треугольники*

Треугольники – 7 класс

Подобие треугольников – 8 класс

Решение прямоугольных треугольников – 8 класс

Решение треугольников – 9 класс.

Особенность школьной программы по геометрии заключается в том, что некоторые модули носят сквозной характер: темы их учебной программы разнесены в 7, 8 и 9 классы. Это, например, тема *Треугольники.* Технологическая проблема заключается в том, что программную среду тестирования необходимо сделать максимально независимой от особенностей национальных учебных программ. Именно с этой целью темы учебной программы объединяются в учебные модули, которые могут использоваться на любых этапах обучения.

Отметим, что не все темы одинаково всесторонне могут быть представлены в той системе тестирования, о которой идет речь. Многие аспекты геометрических знаний школьной программы, особенно для 7 класа, носят описательный характер. Эти знания эффективно проверяются стантартными схемами тестов [12]. Это, например, многие (но не все) вопросы модуля 1.

1.1 Модель учебного модуля математической дисциплины

Общие определения математической модели учебного модуля приведены в [8,9]. Здесь они иллюстрируются примерами из геометрии.

Сигнатура учебного модуля. Математические теории, излагаемые в учебном модуле, используют, как правило, новые математические символы. Особенность геометрических модулей заключается в том, что в его сигнатуру входят имена типов геометрических фигур, отношений между ними и операций над ними. Формальные определения этих понятий в терминах многосортных алгебр приведены в [11]. Понятие геометрического объекта (на примере объекта аналитической геометрии) и структура его сигнатуры приведены в [10]. Методы проектирования сигнатур описаны в [8-11].

Пример 1. Сигнатура модуля 1.

Простейшие геометрические объекты (фигуры) это:

Типы геометрических фигур: Точка, Линия = (Прямая, Отрезок, Луч), Угол.

Числовые типы: УглМера = (Градус | Радиан), ЛинМера = (Сантиметр, Метр, …)

Отношения:

Принадлежность (Точка, Линия), Принадлежность (Линия, Линия)

Параллельность (Линия, Линия)

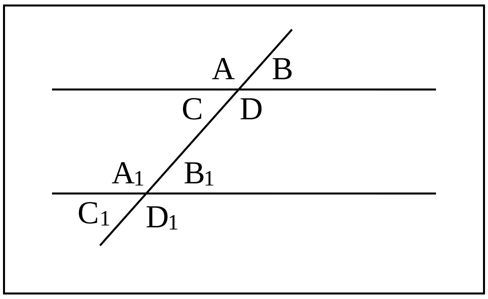
Перпендикулярность (Линия, Линия)

Операции

Угол (Линия, Линия)   // Конструктор угла
Вершина (Угол, Квал):Точка   // Селектор вершины угла
Сторона (Угол)   // Селектор стороны угла
Величина (Угол):УглМера
Отрезок (Точка, Точка)   // Конструктор отрезка
Конец (Отрезок, Квал):Точка   // Селектор стороны угла
Длина (Отрезок):ЛинМера

*Математические модели учебного модуля***.** Каждый учебный модуль определяется списком математических объектов (моделей), являющихся предметом изучения. В геометрических модулях это формальные определения моделей и их чертежи. Список метематических моделей определяет содержание системы тестов данного учебного модуля.

Пример 2. Пересечение двух параллельных прямых секущей.



$A + B = 180^0$, $C = A$, $D = B$,
$A_1 = A$, $B_1 = B$, $C_1 = C$, $D_1 = D$

Дано: $A = 30^0$
Найти: D_1

Рис.1. Чертеж и математическая модель «Пересечение двух параллельных прямых секущей»

*Элементарные преобразования моделей***.** В *учебном модуле* определены так называемые элементарные операции – преобразования математических объектов этого модуля. В нашем примере элементарные преобразования – суть алгебраические преобразования модели. В более развитых математических моделях к элементарным преобразованиям относятся, например, дополнительные построения, применеие геометрических теорем. Отметим, что любое дополнительное построение включает не только преобразование чертежа, но и включение в модель системы соотношений, определеяющих это дополнительное построение. Методы проектирования элементарных преобразований описаны в [2, 8].

Модели учебных задач. Основной предмет изучения учебного модуля математической дисциплины – учебные задачи, перечень типов которых определен учебной программой дисциплины. Формулировка учебной задачи использует одну или несколько базовых математических моделей, объединенных соотношениями. Типичный пример – задачи на треугольник со вписанной в него окружностью. Формальные определения стандартных геометрических задач включают модель задачи $M(x_1,...,x_n)$, условие задачи $\varphi(x_1,...,x_n)$ и вопрос $Q(x_{j_1},...,x_{j_m})$. В этой работе рассматривается особый вид геометрических учебных задач – тестовые геометрические задания.

2. Тестовые геометрические задания

Классом тестовых заданий называется класс учебных задач $P = < M, \Phi, Q >$, в котором

- определена модель $M = M(x_1, x_2,..., x_n)$ зависящая от переменных $x_1, x_2,..., x_n$,
- множество условий, заданное конечным набором логических формул $\Phi = < \Phi_1,...,\Phi_k >$
- и конечным набором вопросов $Q = < Q_1,...,Q_m >$.

Конкретное тестовое задание – элемент класса $P = < M, \Phi, Q >$ имеет вид $P_{ij} = < M, \varphi_i, Q_j >$.

Замечание. Когда речь идет о тестах, вопросы к задачам принято называть ответами. На рис.2. представлены чертеж и математическая модель класса тестового задания и конкретное тестовое задание на решение треугольников с использованием теорем косинусов и синусов. В качестве примера этой модели приведены три конкретных тестовых задания: $\Phi = < \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 >$, $Q = < Q_1, Q_2, Q_3 >$.

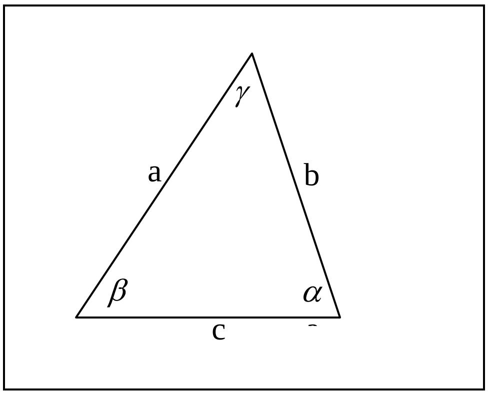
T1: $\varPhi_1 = (a = 4) \,\&\, (b = 5) \,\&\, (\gamma = 30^0)$, $Q_1 = c$

T2: $\varPhi_2 = (a = 4) \,\&\, (\alpha = 45^0) \,\&\, (\gamma = 30^0), Q_2 = b$

T3: $\varPhi_3 = (a = 4) \,\&\, (\alpha = 45^0) \,\&\, (\gamma = 30^0), Q_3 = \lambda$

Тестовое задание T1 приведено на рис.2.

Пример 3. Класс тестового задания *Решение треугольника*



$M(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}, \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Дано: $a = 4, b = 5, \gamma = 30^0$

Найти: c

Рис.2 Чертеж и математическая модель класса тестовых заданий на решение треугольника

Ниже приведены три шаблона тестовых заданий, экземпляры которых – конкретные тестовые задания T1,T2, T3:

$\Phi = < \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 >$, $Q = < Q_1, Q_2, Q_3 >$

Template T1: $\varPhi_1 = (a \in Nat[4,9]) \,\&\, (b \in Nat[4,9]) \,\&\, (\gamma \in (15^0, 30^0, 45^0, 60^0))$, $Q_1 = c$

Template T2 : $\varPhi_2 = (a \in Nat[4,12]) \,\&\, (\gamma \in (15^0, 30^0, 45^0, 60^0) \,\&\, (\gamma \in (15^0, 30^0, 45^0), Q_2 = b$

Template T3 : $\varPhi_3 = (\gamma \in (15^0, 30^0, 45^0, 60^0) \,\&\, (\gamma \in (15^0, 30^0, 45^0), Q_3 = \lambda$

Классы тестовых заданий, определенные шаблонами, задают конкретные тесты соответственно на применение теоремы косинусов, синусов и теоремы о сумме внутренних углов треугольника. Формула $x \in Nat[a, b]$ интерпретируется как генерация случайных натуральных чисел из диапазона $[a, b]$ в качестве значений переменной x модели. Подробное описание синтаксиса и семантики задания алгебраических параметров моделей описано в [6].

Модели учебных геометрических задач, дополнительно к определениям алгебраических параметров, могут содержать определения подмножеств, например, в синтексисе $\{x, y\} \subset \{a, b, c\}$ и семантикой «множество $\{x, y\}$ есть подмножество множества $\{a, b, c\}$». Но и этого может оказаться недостаточно. Например, в тестовом шаблоне Template

T_1 существуют три варианта: $(a,b,\gamma,c),(a,c,\beta,b),(b,c,\alpha,a)$. Такие шаблоны определяются следующим образом:

Template T_1:

$$\varPhi_1 = ((u,v,\varphi,w) \in \{(a,b,\gamma,c),(a,c,\beta,b),(b,c,\alpha,a)\})\ \&$$
$$(u \in Nat[4,9])\ \&\ (v \in Nat[4,9])\ \&\ (\varphi \in (15^0,30^0,45^0), Q = w$$

3. Описания тестовых заданий

В принципе существует два подхода к решению задачи генерации конкретных тестовых заданий. Во-первых, можно хранить серии однотипных тестовых заданий в базе данных. Во-вторых, можно реализовать в виде системных процедур алгоритмы автоматической генерации однотипных тестовых заданий. Каждый из этих подходов имеет свои преимущества и недостатки. В первом случае необходимо тратить много времени на наполнение базы данных, и тестовые задания могут повторяться. Во втором случае время тратится на реализацию алгоритмов автоматической генерации, но каждое тестовое задание индивидуально. Взвешенный подход заключается в том, чтобы:

1. На основе алгоритмического анализа моделей и задач каждой конкретной предметной области для каждого достаточно широкого класса тестовых заданий разрабатывать единую общую модель этого класса (шаблон теста), а также модели и алгоритмы генерации условий и ответов к этой модели.
2. Разработать общие CASE-технологии описания подклассов тестовых заданий на основе единой общей модели пользователями системы компьютерной математики учебного назначения.
3. Разработать общие механизмы хранения и вызова алгоритмов генерации конкретных тестовых заданий.

Описание модели тестового задания содержит описание типа математического объекта и типов его параметров. В работе определены следующие алгебраические типы*:

Атомарные типы: числа, логические значения, переменные.

Числа: полукольцо Nat, кольцо Int, поле Rat.

Логические значения: $Bool = (False, True)$.

Переменные: малые и большие латинские буквы и эти буквы с (натуральними) индексами. Множество переменных обозначим через Var.

Выражения: Термы от атомарных переменных указанных типов. В иерархии геометрических учебных модулях сигнатуры расширяются «угловыми» типами (см. определение сигнатур). В алгебре изучаются: *линейные выражения, мономы, целые выражения, рациональные выражения, радикальные выражения, модульные выражения.*

Атомарные предикаты: $A = B, A \neq B, A < B, A > B, A \leq B, A \geq B$. В геометрических учебных модулях сигнатуры предикатов расширяются предикатами *Принадлежность, Параллельность, Перпендикулярность* (см. определение сигнатур примера 1).

Логические выражения – конъюнкции и дизъюнкции атомарных предикатов. В геометрии изучаются: *системы уравнений и неравенств.*

Геометрические объекты. Специфика предметной области Геометрия заключается в том, что в ней рассматриваются математические модели *геометрических объектов (ГО) (фигуры).* Наш подход состоит в определении базовых ГО и методов построения и доступа составных ГО. Для задачи построения системы тестирования геометрических знаний математическая модель включает чертеж и алгебраическую модель:

ГО = <чертеж, алгебраическая модель>

Математические модели представлены в примерах 2, 3 на рис. 1, 2. Алгебраическая модель M составного ГО включает модели $M_1,...,M_k$ его составных частей и системы соотношений $\varPhi_{M_1,...,M_k}$, определяющих связи составных частей в модели. Так, модель T

Треугольник со вписанной *Окружностью* O включает модели T, O и соотношения, определяющих вписанную окружность.

Важную роль в моделях систем тестированя геометрических знаний играют дополнительные элементы и атрибуты геометрических моделей. В примере 4 описана называемая полная модель класса тестовых заданий *Элементы треугольника*

Пример 4. Тестовое задание *Элементы треугольника*

Основные элементы

Имя	Обозначение	Тип	Характер	Алгебр. Модель
Сторона	a,b,c	Отрезок	Длина	$\alpha+\beta+\gamma=180$
Вершина	A,B,C	Точка		$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$
Внутренний угол	α,β,γ	Угол	Величина	$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}$

Дополнительные элементы

Площадь	S	Число	Величина	$S=\frac{1}{2}ah_a$
Полупериметр	p	Число	Длина	$S=\frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$
Высота	h_a,h_b,h_c	Отрезок	Длина	$S=\frac{1}{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Медиана	m_a,m_b,m_c	Отрезок	Длина	$S=rp$
Биссектриса	d_a,d_b,d_c	Отрезок	Длина	$p=\frac{a+b+c}{2}$
Описанная окружность	O_e, R	Окружность (центр, радиус)	Точка, Длина	$R=\frac{a}{2\sin(\alpha)}$
Вписанная окружность	O_i, r	Окружность (центр, радиус)	Точка, Длина	$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)}$ $d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-c)}$

Примечание В состав алгебраической модели вместе с каждой формулой $f(a,b,c)$ входят формулы . $f(b,c,a), f(c,a,b)$.

Тестовые задания – шаблоны. В [7] выражение $F(x_1,...,x_m;a_1,...,a_k)$ в сигнатуре Σ_{SD} данной предметной области SD называется выражением-шаблоном (Expression Template), переменные $x_1,...,x_m$ – метапеременными, а переменные $a_1,...,a_k$ – параметрами. Значения метапеременных – переменные-элементы множества Var. Область значений параметров – числовые множества. В геометрических моделях метапеременные, как правило, имеют стандартные математические обозначения (см. таблицу в примере 4). Конкретные значения эти переменные принимают в силу симметрии в обозначениях теометрических элементов. В треугольнике эта симметрия обусловлена «равноправием» однотипных геометрических элементов: стороны – a,b,c, вершины – A,B,C. Это означает, например, что любой тест, в условие которого входят стороны a,b и угол α, имеет 3 варианта. Шаблон тестового задания на теорему косинусов формулируется следующим образом:

Найти сторону треугольника w, если известны стороны u,v» и угол φ между ними.

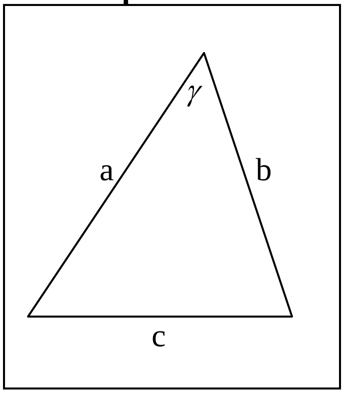
Дано: $u=Val(u), v=Val(v), \varphi=Val(\varphi)$.

Найти: $w=?Val(\varphi)$.

$$\Phi_1=((u,v,\varphi,w)\in\{(a,b,\gamma,c),(a,c,\beta,b),(b,c,\alpha,a)\}\,\&(w^2=u^2+v^2-2uv\cos(\varphi)))$$

На чертеже должны быть обозначены только известные данные и данное, которое нужно найти. Заметим, что содержимое окна чертежа (чертеж с необходимыми обозначениями) полностью может быть сформировано исходя из шаблона и условия тестового задания.

Поле чертежа



Поле условия

Найти сторону треугольника c, если известны стороны «a, b» и угол γ между ними.
Дано: $a = 4,\ b = 5,\ \gamma = 30^0$
Найти: c

Поле ввода ответа

$c =$

Рис.3 Окно экземпляра тестового задания на теорему косинусов

Шаблоны тестовых заданий обозначают как общий вид модели, так и общий вид ответа тестового задания. Таким образом, основа определения тестового задания T – пара $< F_{Task}, F_{Ans} >$, где F_{Task}, F_{Ans} - выражения-шаблоны, определенные над общими списками метапеременных и параметров и обозначающие соответственно модель и ответ тестового задания (вопрос соответствующей задачи). Обозначим эти списки через $X_{\mathrm{var}}, A_{Coef}$. Тогда

$$T(X_{\mathrm{var}}, A_{Coef}) =< F_{Task}(X_{\mathrm{var}}, A_{Coef}), F_{Ans}(X_{\mathrm{var}}, A_{Coef}) >$$

Заключение.

Приведенное выше определение шаблона и конкретного тестового задания позволяет:
1. Предоставить возможность составителю тестов быстро и правильно составить всесторонюю систему тестов проверки процедурных знаний по данной теме.
2. Автоматизировать процедуру генерации достаточно большого количества конкретных тестовых заданий исходя из одного шаблона.
3. Решить задачу проверки правильности ответа и хода решения теста (см.[6,7]).
4. Решать тестовое задание по шагам, применяя символьные выражения и проверяя на каждом шаге правильность их применения (см. [8,10,11]).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Львов М. С. Основные принципы построения педагогических программных средств поддержки практических занятий / М. С. Львов // Управляющие системы и машины. – 2006. – № 6. – С. 70-75.
2. Львов М. С. Проектирование логического вывода как пошагового решения задач в математических системах учебного назначения / М. С. Львов // Управляющие системы и машины. – 2008.-№ 1. – С. 25-32.
3. Львов М. С. Концепция информационной поддержки учебного процесса и ее реализация в педагогических программных средах / М. С. Львов // Управляющие системы и машины. – 2009. – № 2. – С. 52-57, 72.
4. Львов М. С. Концепция, архитектура и функциональность гибкой распределенной программной среды учебного назначения для средней школы. Рабочее место методиста / М. С. Львов // Управляющие системы и машины. – 2009. – № 6. – С. 71-78.
5. Львов М. С. Распределенные программные среды учебного назначения. Подсистема управления учебным процессом / М. С. Львов // Управляющие системы и машины. – 2010. – № 1. – С. 66 – 71.
6. Львов М. С. Математические модели предметных областей в системах компьютерной математики учебного назначения. / М. С.Львов // Вестник Харк. нац. ун-та. – 2011. – № 987. –

С. 46–60. – (Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления").

7. Львов М. С. Математические тесты в системах компьютерной математики учебного назначения. / М. С.Львов // Управляющие системы и машины. – 2011. – № 6. – С. 60–67.
8. Львов М. С. Интеллектуальные свойства систем компьютерной математики учебного назначения и методы их реализации. / М. С.Львов // Искуственный интеллект. – 2011. – № 2. – С. 45–52.
9. Львов М. С. Синтез інтерпретаторів алгебраїчних операцій в розширеннях багатосортних алгебр / М. С. Львов // Вісник Харьківського національного университету. – 2009. – № 847. – С. 221–238. – (Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»).
10. Львов М. С. Математичні моделі та методи підтримки ходу розв'язання навчальних задач з аналітичної геометрії / М.С.Львов // Искуственный интеллект. – № 1. – 2010. –С. 86–92.
11. Львов М. С. Тригонометрические вычисления в системах компьютерной математики учебного назначения. / М. С. Львов // Искуственный интеллект. –2011. – № 4. – С.417 –423.
12. Кравцов Г. М. Адаптивные и объектные тесты в модели контроля знаний по стандарту IMS / Г. М. Кравцов, Д. Г. Кравцов // Управляющие системы и машины. – 2008. – №1. – С.42 – 48.