УДК 621.391

Лазурчак І. І.
Дрогобицький державний педагогічний університет

3D - ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РЕКУРСИВНИХ РОЗГОРТОК З ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

В роботі розглядається алгоритм побудови N-вимірних рекурсивних розгорток Пеано. Приводиться їх двовимірна та тривимірна реалізація з допомогою системи комп'ютерної математики Mathematica 7.0. Обговорюються питання редукції багатовимірного простору до одновимірного при обчисленні кратних інтегралів.

Ключові слова: *рекурсивні розгортки, тривимірна графіка, комп'ютерна математика, кратні інтеграли.*

Постановка проблеми та її зв'язок із важливими науковими та практичними завданнями.

Система освіти є одним з об'єктів інформатизації суспільства. Це вимагає детального аналізу сучасних систем навчання інформатичного циклу та створення нових. Зокрема, впровадження нових алгоритмічних схем і програмних засобів у вищій школі повинно сприяти підвищенню інтенсивності, ефективності та якості процесу навчання. Інтенсивний розвиток інформаційних технологій засновано на ефективній реалізації алгоритмів стискування, шифрування, фільтрації, швидкого пошуку і розпізнавання *N*-вимірних даних. Алгоритми обробки інформації орієнтовані на операції з даними в просторі певної розмірності (двовимірному (***2D***-) або тривимірному (***3D***-)). Для узгодження розмірності алгоритмів обробки з розмірністю оброблюваної інформації використовуються перетворення на основі розгорток. Узагальненою моделлю розгортки є крива, яка заповнює простір. Компактний опис траєкторій рекурсивних розгорток, розробка ефективних алгоритмів їх формування, а також практичне використання при розв'язуванні багатовимірних задач є **актуальною** проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Теоретичній розробці та побудові класичних рекурсивних розгорток Гільберта та їх модифікацій Пеано присвячено багато робіт [1, 9]. У 1975 році Мандельброт Б. [10] для таких подрібнених самоподібних структур використав слово *фрактал* як назву для об'єктів, розмірність Хаусдорфа яких є більшою за топологічну розмірність (розмірність Лебега). В широкому розумінні фрактал означає нерегулярну фігуру, малі частини якої в довільному збільшенні є подібними до неї самої. Фрактали, згенеровані з використанням рекурентних відношень, зазвичай, є майже (але не точно) самоподібними. За допомогою фракталів можна стискати великі растрові зображення до частин нормальних розмірів. Це твердження випливає з теореми Банаха про стискаючі відображення [3] і є результатом роботи дослідників Технологічного інституту (США). Так система призначення ***IP***-адрес в мережі Netsukuku використовує принцип фрактального стиснення інформації для компактного зберігання інформації про вузли мережі.

На даний час розроблено декілька універсальних комп'ютерних математичних пакетів, що дають можливість спеціалістам розв'язувати велику кількість досить складних задач. Одні з найпотужніших систем комп'ютерної математики (**СКМ**) – системи Mathematica (версії 7.x–9.x) та Maple (версії 12.x–15.x). Система Mathematica є інтерактивна, тобто працює в режимі постійного діалогу з користувачем і, водночас, допускає програмний режим роботи, включаючи функціональний та процедурний стилі програмування. Вона гнучка та універсальна, так як передбачає числові процедури та аналітичні (символьні) перетворення [5, 6, 8], що дозволяють знаходження в аналітичному вигляді границь та похідних функцій (включаючи випадок декількох змінних), невизначених та невласних інтегралів і т.п.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Для вирішення низки задач, таких як багатовимірна оптимізація [9], розв'язування систем нелінійних рівнянь [3, 9], обчислення кратних інтегралів [3] доцільно використовувати редукцію багатовимірного простору в одновимірний (одиничний відрізок) за допомогою розгорток. Це надасть можливість уникнути громіздких обчислень та доведень, а також поширювати одновимірні алгоритми, такі як, наприклад, метод подвійного та кратного перерахунку [2] на багатовимірний випадок. Використання СКМ, які мають внутрішню мову функціонального та процедурного програмування, засоби символьних перетворень, потужні *3D*- графічні, анімаційні засоби, математичні пакети розширень, відкривають можливості для ефективного застосування нових розроблених і модифікацію існуючих аналітичних методів та чисельних алгоритмів. Крім цього, зазначені системи можуть успішно використовуватись не тільки при викладанні шкільних курсів з геометрії, комп'ютерної графіки, а й математичного аналізу, лінійної алгебри, тощо.

Мета роботи – побудова алгоритму та розробка програмного комплексу для ***3D***-візуалізації рекурсивних розгорток, включаючи анімаційні режими їх представлення.

Виклад основного матеріалу дослідження.

По формі кривих, які заповнюють простір, розгортки можуть бути розділені на декілька класів. Найбільший інтерес для практичного використання представляють три класи розгорток : хаотичні , періодичні і рекурсивні (фрактальні). Простими рекурсивними розгортками, що мають неперервну траєкторію і повністю заповнюють фігури великих розмірностей, є розгортки Гільберта та Пеано .

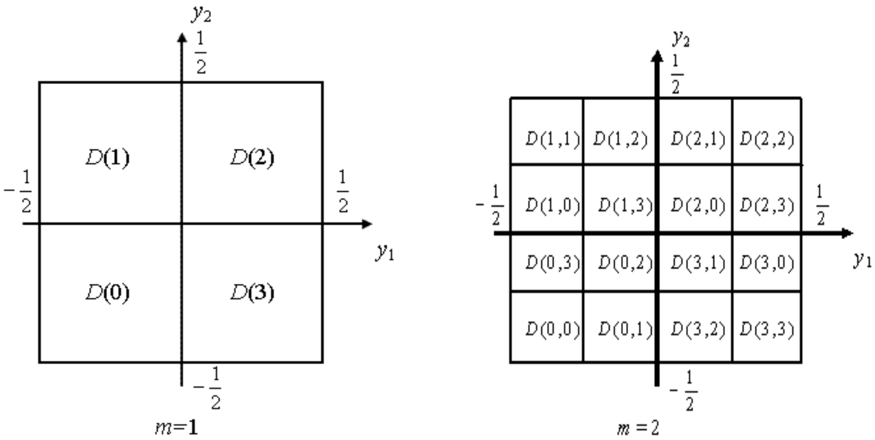
Розглянемо одне з відображень $y(x)$, яке володіє властивостями неперервності та однозначності, і яке буде використане надалі для побудови чисельних методів. В якості такого відображення виберемо криву Пеано, визначену побудовою, запропонованою Гільбертом, бо така побудова найпростіше узагальнюється на багатовимірний (N>2) випадок. В [1, 9] був детально розглянутий конструктивний опис, придатний для подальшого створення алгоритмів наближеного обчислення таких кривих, що відображено в подальших викладках.

Вказана побудова неперервного однозначного відображення $y(x)$ відрізка [0, 1] на гіперкуб

$$D = \{y \in R^N : -\frac{1}{2} \le y_i \le \frac{1}{2}, \quad 1 \le i \le N\} \qquad (1)$$

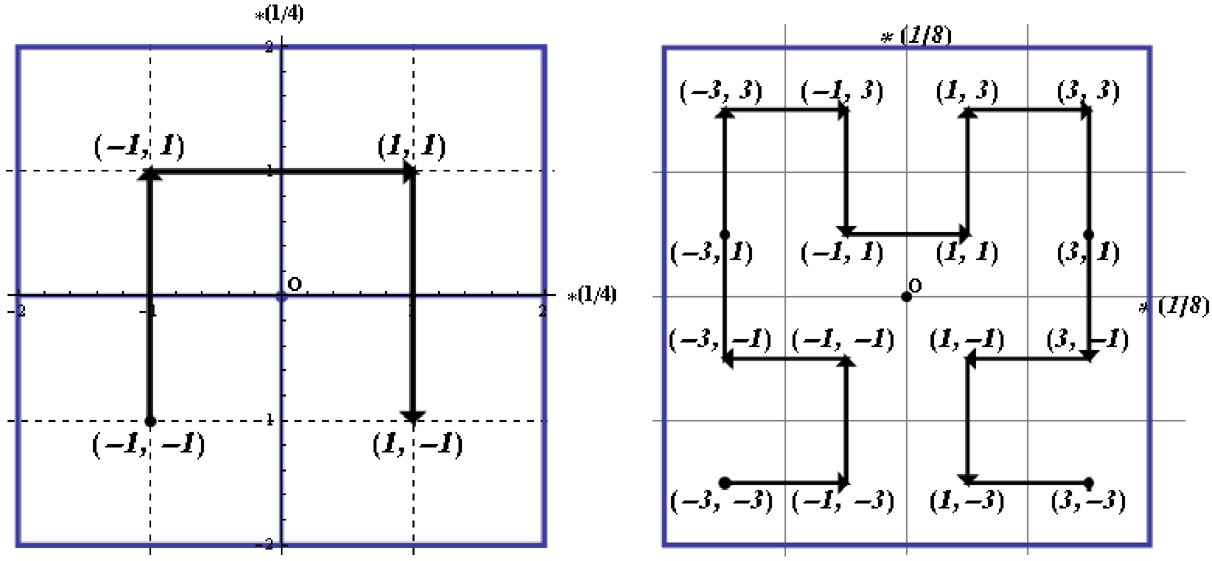
зводиться лінійним перетворенням координат і полягає в наступному.

1) Гіперкуб D з (1), довжина ребра якого дорівнює 1, розділяється координатними площинами на 2^N гіперкубів «першого розбиття» (з довжиною ребра, рівною 1/2), які пронумеруємо числами z_1 від 0 до 2^N -1, причому гіперкуб першого розбиття з номером z_1 домовимося позначати через $D(z_1)$ (випадок $N = 2$ описаний на мал. 1)



Мал. 1. Розбиття гіперкубу першого та другого порядків (N=2).

Далі кожен гіперкуб першого розбиття у свою чергу також розбивається на 2^N гіперкубів другого розбиття (з довжиною ребра, рівною 1/4) гіперплощинами, паралельними координатним, і що проходять через серединні точки ребер гіперкуба, ортогональних до цих гіперплощин. При цьому гіперкуби другого розбиття, що входять в гіперкуб $D(z_1)$, нумеруються числами z_2 від 0 до 2^N-1, причому гіперкуб другого розбиття з номером z_2, що входить в $D(z_1)$,домовимось позначати через $D(z_1, z_2)$. З'єднуючи центри отриманих на мал.1 гіперкубів відрізками, отримаємо ламану лінію або розгортки відповідно першого та другого розбиття. Координати вказаних точок (вузлів) обчислені і представлені на мал.2



а) *m=1*; б) *m=2*;

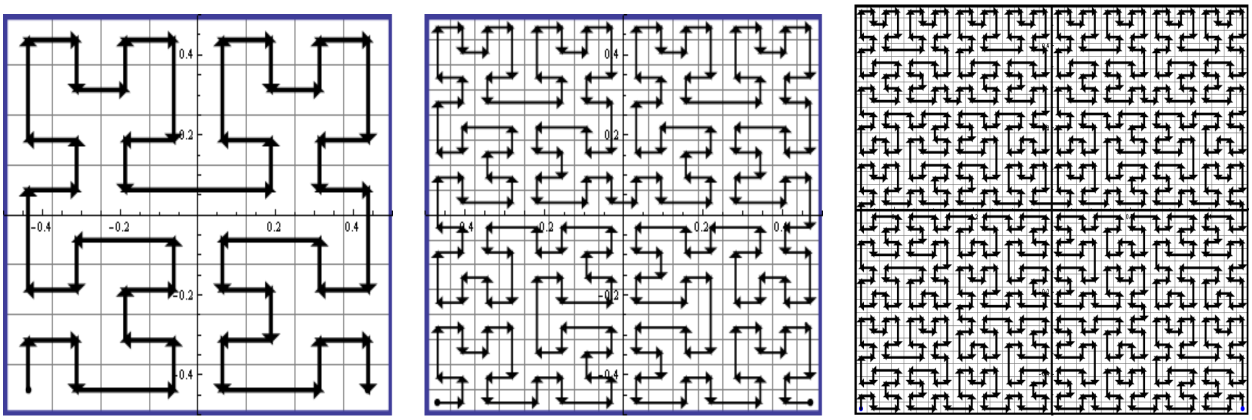
Мал. 2. Плоскі (2D-) розгортки з координатами вузлів (N=2).

Продовжуючи вказаний процес, можна побудувати гіперкуби будь-якого *m*-го розбиття з довжиною ребра, рівною деякому значенню $D(z_1,..., z_m)$, причому

$$D(z_1) \supset D(z_1, z_2) \supset ... \supset D(z_1,..., z_m),$$

$$0 \le z_j \le 2^N - 1,\ 1 \le j \le m.$$

Описана схема редукції за допомогою розгорток, які називають кривими Пеано, забезпечує побудову нерівномірної сітки, що поступово зі збільшенням $\boldsymbol{m}$ ущільнюється під задану точність зразу по всій області D, а тому у випадку зупинки обчислень буде отримана оцінка для всієї області (див. мал.3)



а) *m=3*; б) *m=4*; в) *m=5*;

Мал. 3. Плоскі (2D-) розгортки 3-5 порядків (N=2).

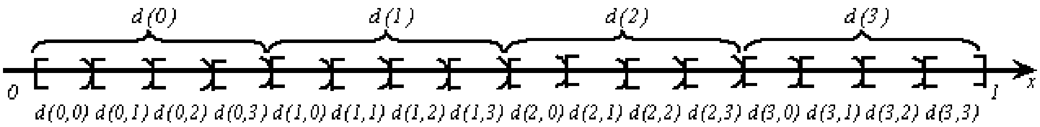
Використання таких кривих забезпечують близькість точок фігури, відповідним точкам, близьким на кривій. Важливим моментом є те, що останні версії СКМ Mathematica 7.0 здатні реалізувати рухомі графічні об'єкти, тобто комп'ютерну анімацію. Тому напрям траєкторії руху за стрілками можна прослідкувати в динамічному режимі роботи СКМ з допомогою команди `Animate[expr, {i, imin, imax}]`.

2) Тепер здійснимо поділ відрізка [0, 1] на 2^N рівних частин, кожну з яких, у свою чергу, також розділимо на 2^N рівних частин і т.д., причому елементи кожного розбиття нумеруються зліва направо числами z_j (*j* - номер розбиття) від 0 до 2^N-1. При цьому, інтервали ***m***- го розбиття домовимося позначати як $d(z_1,.,z_m)$, де наприклад, $d(z_1,z_2)$ позначає інтервал другого розбиття з номером z_2, що є частиною інтервалу $d(z_1)$ першого розбиття з номером z_1. Відзначимо, що

$$d(z_1)\supset d(z_1,z_2)\supset ...\supset d(z_1,...,z_m)$$

і довжина інтервалу $d(z_1,.,z_m)$ рівна $(1/2)^{mN}$.

Випадок *N = 2* представлений на мал. 4 для $m=1$ і $m=2$



Мал. 4. Розбиття одиничного відрізку першого та другого порядків.

3) Приймемо, що точка $y(x)\in D$, яка відповідає точці $x\in$ [0, 1], при будь-якому $m\geq 1$ міститься в гіперкубі $D(z_1,.,z_m)$, якщо x належить інтервалу $d(z_1,.,z_m)$, тобто

$$x\in d(z_1,...,z_m)\to y(x)\in D(z_1,...,z_m).$$

Побудована відповідність $y(x)$ є однозначною.

4) Для будь-якого $x\in d(z_1,.,z_m)$ справедливо, що

$$x-\left(\frac{1}{2}\right)^{mN}\leq\sum_{j=1}^{m}z_j\left(\frac{1}{2}\right)^{jN}<x+\left(\frac{1}{2}\right)^{mN}.$$

Отже, якщо представити *x, y* вигляді двійкового числа з фіксованою крапкою, тобто

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\left(\frac{1}{2}\right)^{i}, \qquad (2)$$

де α_i є двійкові цифри, то за першими mN цифрами $\alpha_1,...,\alpha_{mN}$ цього числа можна вказати гіперкуб *m-го* розбиття $D(z_1,.,z_m)$, що містить точку $y(x)$, оскільки

$$z_j = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{j \cdot N - i} 2^i \,, \qquad 1 \le j \le m \,, \tag{3}$$

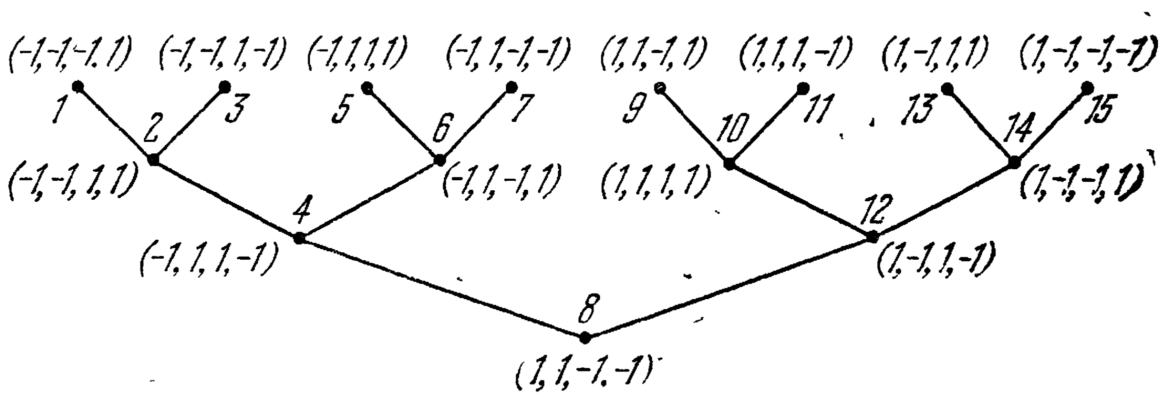
де α_{jN-i} з (2). Тобто точка $y(x)$ може бути оцінена з точністю $(1/2)^{m+1}$ по кожній координаті, якщо задано значення (3).

5) Після отримання списку елементів сітки, упорядкованого у відповідності з розміщенням на кривій, достатньо розділити список на необхідне число частин у відповідності з установленим порядком. Для того, щоб побудованевідображення було ще і неперервним, накладемо вимоги на порядок нумерації гіперкубів кожного розбиття.

Визначимо вектор $z^m = (z_1,...,z_m)$, відповідний гіперкубу $D(z_1,.,z_m)$ ***m***-го розбиття і домовимося, що вектор z^m передує вектору $\bar{z}^m$, якщо при $m \ge 1$ або $z_1 < \bar{z}_1$ існує таке k , $1 \le k < m$, що $z_j = \bar{z}_j$, $1 \le j \le k$ і $z_{k+1} < \bar{z}_{k+1}$.

Введене відношення передування встановлює суворий порядок на множині 2^{mN} різних векторів z^m, мінімальним елементом якої є вектор (0, ..., 0), а максимальним — вектор $(2^N - 1, ..., 2^N - 1)$.

Для неперервності побудованого відображення, а відтак послідовної нумерації гіперкубів $D(z_1,.,z_m)$, вистачає, щоб суміжні гіперкуби будь-якого ***m***-го розбиття мали спільну грань. Один з можливих способів такої нумерації може бути встановлений за допомогою *двійкового дерева,* яке має N ярусів, що нумеруються знизу доверху (рис. 5)



Мал. 5. Двійкове дерево (N = 4) з нумерацією вузлів.

Нумерація в будь-якому піддереві починається з найлівішої вершини верхнього (N-го) ярусу, що належить даному піддереву. Після завершення нумерації деякого піддерева нумерується вузол, для якого це піддерево було лівим, і починається нумерація правого піддерева, відповідного даному вузлу. Як мінімальний номер приймемо значення 1. Тоді максимальний номер рівний $2^N - 1$.

Крива Пеано $y(x)$ визначена через відповідність між інтервалами $d(z_1,...,z_m)$ і гіперкубами $D(z_1,...,z_m)$ розбиття з номером ***m*** *(m*=1,2,...) таке, що з $x \in d(z_1,...,z_m)$ слідує $y(x) \in D(z_1,...,z_m)$. Тому, для будь-якої заданої точності $\varepsilon > 0$ можна вибрати значення $m \ge 1$, що задовольняє умові $(1/2)^{m+1} \le \varepsilon$ і прийняти як оцінку точки $y(x)$ центр $y(z_1,...,z_m)$ гіперкуба $D(z_1,...,z_m)$, що містить вказану точку $y(x)$. Точність такого наближення по будь-якій координаті буде не гірше ε, бо

$$\left| y_i(x) - y_i(z_1,...,z_m) \right| \le \left(\frac{1}{2} \right)^{m+1} \le \varepsilon \,, \qquad 1 \le i \le N \,. \tag{4}$$

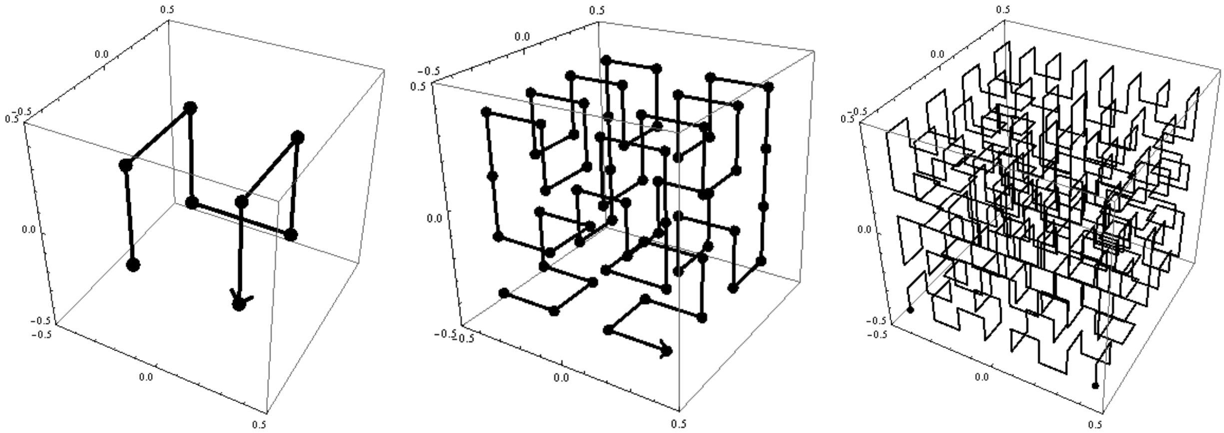
Таким чином, наближене обчислення точки $y(x)$ зводиться до визначення центру $y(z_1,...,z_m)$, відповідного послідовності номерів $z_1,...,z_m$ з (3).

За аналогією можна отримати і рекурсивні розгортки при $N \geq 3$, і розгортки більш високих порядків. Представлені на мал. 6 просторові розгортки при *N*=3 отримані *3D*-графічними засобами СКМ Mathematica 7.0, а саме з допомогою команди

`Graphics3D[`primitives`,` options`]`

де використані графічні примітиви $\begin{cases} Line \\ Point \end{cases}$ [<***список координат точок***>] та опції

AbsoluteThickness*[4], *PointSize*[*Large*], *PlotRange*→{{-1/2, 1/2}, {-1/2, 1/2}}, *Axes*→*True



а) *m=1*; б) *m=2*; в) *m=3*;

Мал. 6. Просторові (3D-) розгортки (N=3).

Використання гами кольорів в опції ***VertexColors*** та динамічний режим обертання просторової фігури надає можливість емпірично вибирати найкращий ракурс та забарвлення (фон) фігури, а також точку перегляду її для подальшого візуального аналізу.

При використанні традиційних проблемно-орієнтованих мов програмування (Pascal, C++, Fortran) властиве обмеження на порядок числа і довжину мантиси (залежно від типу в межах від 11 до 20 цифр), тому для великих N та $\boldsymbol{m}$, значення $\left(\frac{1}{2}\right)^{mN}$, тобто довжина інтервалу $d(z_1,.,z_m)$, не повинні перевищувати машинної точності ("нуля"). Однією із вагомих переваг СКМ є здатність працювати з цілочисельною арифметикою практично необмеженої розмірності і дійсними числами, що дозволяють використовувати в мантисі до 5 тис значущих цифр, що суттєво збільшує діапазон зміни порядку числа.

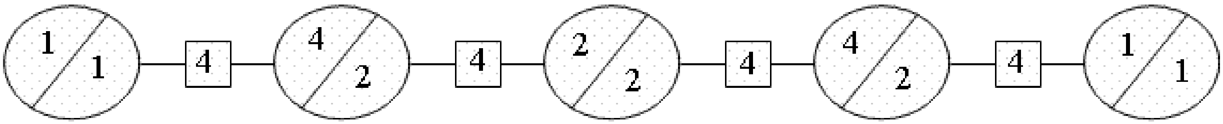
Щодо практичного застосування, то треба відзначити, що подвійний інтеграл

$$\iint_{\tilde{D}} f(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) d\,\tilde{y}_1 d\,\tilde{y}_2\,,$$

де область інтегрування задана у вигляді прямокутника $\tilde{D} = \{(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2): a_i \leq \tilde{y}_i \leq b_i; i = 1,2\}$, може бути представлений через однократний інтеграл завдяки редукції області $\tilde{D}$ на одиничний відрізок дійсної осі через плоскі розгортки Пеано і послідуючого перетворення координат

$$...\tilde{y}_i = y_i(b_i - a_i) + \frac{b_i + a_i}{2}, \quad i = 1,2.$$

Ідея оптимізаційного підходу була описана для однократних інтегралів в роботі [7] і відповідає наведеній нижче схемі (див. мал. 7)



Мал. 7. Коефіцієнти квадратурної формули Сімпсона (n=2, n=4).

Двічі застосовуючи формулу Сімпсона для обчислення визначеного інтеграла $\int_0^1 f(x)dx$ та використовуючи принцип подвійного перерахунку, ми отримаємо в нових позначеннях (старій і новій системі нумерації) наступні розрахункові формули

$$\begin{aligned} &I_k = \frac{h_k}{3}\left[\sigma_0 + 2\sigma_1^{(k)} + 2\sigma_3^{(k)}\right], \quad h_k = \frac{1}{2^{k+1}n}, \quad n \in N^+, \quad k = 0,1,2,\ldots; \\ &\sigma_0 = \left[f(0) + f(1)\right], \qquad \sigma_1^{(k)} = \sum_{i=1}^{2^k n} f\left((2i-1)h_k\right); \\ &\sigma_2^{(k)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(2i\,h_k), & k = 0; \\ \sigma_3^{(k-1)}, & k > 1 \end{cases} \qquad \sigma_3^{(k)} = \sigma_1^{(k)} + \sigma_2^{(k)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Так як сума значень функції у вузлах з парними індексами для нової нумерації (з нижніми коефіцієнтами в кружках) повністю співпадає з сумою всіх значень функції у внутрішніх вузлах старої сітки (з верхніми коефіцієнтами в кружках), то для реалізації принципу подвійного рахунку достатньо лише додатково обчислити значення функції і їх суми тільки у вузлах з непарними індексами (в квадратиках) нової сітки. Обчислення проводяться до тих пір, поки абсолютна (або відносна) апостеріорна оцінка відхилення буде задовольняти потрібній точності $\left|I_k - I_{k-1}\right| < \delta\left(\left| \times I\right|\right).$ Вибір початкових значень ***n, m*** повинен бути таким, щоб довжина проміжку розбиття $d(z_1,.,z_m)$ була не більшою величини кроку h_k, що еквівалентно співвідношенню $\log_2 n < mN - k - 1$. Із подальшим збільшенням кількості ітерацій k необхідно збільшувати також число розбиття ***m***.

Щодо використання методу кратного перерахунку для подвійних інтегралів (в [2] цей метод пропонується для уточнення наближення, отриманого за квадратурною формулою), то, слід очікувати розв'язання поставленої проблеми, попередньо застосовуючи механізм вище приведеної рекурсії. Без особливих труднощів запропонований підхід можна перенести на потрійні і багатократні інтеграли.

Розроблений комплекс програм реалізований у вигляді автоматизованої навчальної системи у візуальному середовищі Delphi [4] із завантаженням *exe*-файлу пакету Mathematica 7.0

– директива ***WinExec*(*PChar*** (*'маршрут до exe-файлу'*, ***SW_SHOWNORMAL***

та підключенням модулів, написаних засобами внутрішньої мови програмування відповідної СКМ.

Висновок.

Схема редукції багатовимірного простору в одновимірний за допомогою рекурсивних розгорток Пеано забезпечує побудову нерівномірної сітки, що поступово ущільнюється під задану точність відразу по всій області *D*, а тому у випадку зупинки обчислень буде отримана оцінка одразу для всієї області. Крім цього, застосування СКМ дозволяє проводити символьні перетворення над аналітичними виразами та числові розрахунки з практично довільною точністю, що є вагомою обставиною при обчисленні багатократних інтегралів.

Сформульована в роботі [2] проблема узагальнення методу кратного перерахунку на випадок кратних інтегралів та для розв'язання диференціальних рівнянь може бути вирішена при застосуванні вище викладеного алгоритму. При цьому доведення апріорних оцінок точності значно спрощується. Разом з методом подвійного перерахунку цей підхід пропонується застосовувати для практичних обчислень, а також використовувати в курсах "Чисельні методи" [3], "Символьні обчислення та комп`ютерна алгебра", які викладаються на більшості природничих спеціальностях.

Розширені функціональні можливості використання систем комп'ютерної математики Mathematica та Maple, а також описано спосіб їх підключення до інших програмних середовищ.

Перспективи подальших розвідок.

Використання в наукових дослідженнях та освітній сфері СКМ, які забезпечують обчислювальний процес в плаваючій арифметиці дуже високої точності і мають потужні графічні засоби та пакети розширень, відкривають перспективи ефективного застосування вже існуючих або модифікованих аналітично-чисельних методів, а також розробку і апробацію нових алгоритмів.

Крім цього, вказаний алгоритм редукції та побудови *3D*- розгорток можна використовувати в нормативних курсах "Обробка зображень та мультимедіа", "Обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка", які входять в цикл дисциплін математичної та природничо-наукової підготовки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Борискевич А.А. Компактное описание и формирование N-мерных рекурсивных разверток / А.А. Борискевич, В.Ю. Цвєтков // Информатика. – 2007. – № 2. – С. 5-15.
2. Вейцбліт О.Й. Метод кратного перерахунку. / О.Й. Вейцбліт // Інформайійні технології в освіті. – 2011. – № 7. – С. 50–60.
3. Гаврилюк І. П. Методи обчислень: Підручник у 2 ч. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К. : Вища школа, 1995. – Ч.2. – 431 с.
4. Глинський Я.М. Паскаль. Turbo Pascal і Delphi / Глинський Я.М., Анохіна В.Є., Ряжська В.А. – Львів: "Деол", 2001. – 144 с.
5. Дьяконов В. П. MATHEMATICA 5.1/5.2/6.0. Программирование и математические вычисления / Дьяконов В.П. – М. : ДМК Пресс, 2006. – 576 с.
6. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. – 2-е вид. / Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. – К.: НПУ ім. Драгоманова, 2009. – 282 с.
7. Лазурчак И. Численная реализация квадратурной формулы Симпсона с автоматическим выбором шага / И.И. Лазурчак, Ю.М. Галь. – К., 1989. – 12 с. Деп. в УкрНІІНТІ, 1989, №17, У-89.
8. Лазурчак І. І. Вільнопоширювані системи комп'ютерної математики в освіті та науці / І. І. Лазурчак, Т. П. Кобильник // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції FOOS. – 01-06.02.2011, Львів. – С. 81 – 83.
9. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах / Р. Г. Стронгин – М.: Наука, 1978. – 240 с.
10. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. — Ижевск: ИКИ, 2010. — 656 с.

Стаття надійшла до редакції 22.08.13

Lazurchak I.
State Pedagogical University of Drogobych

3D - RECURSIVELY SCANS IMAGING SYSTEM WITH COMPUTER MATHEMATICS

In this paper the algorithm for constructing the N-dimensional recursive Peano scans. Driven by their two-dimensional and three-dimensional realization of a system of computer mathematics Mathematica 7.0. We are discussing the issue of reduction of the multidimensional space to one-dimensional in the calculation of multiple integrals.

Keywords: recursive scanning three-dimensional graphics, computer mathematics, multiple integrals.

Лазурчак И. И.
Дрогобычский государственный педагогический университет имени Ивана Франко

3D - ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕКУРСИВНЫХ РОЗВЕРТОК С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В работе рассматривается алгоритм построения N-мерных рекурсивных разверток Пеано. Приводится их двухмерная и трехмерная реализация с помощью системы компьютерной математики Mathematica 7.0. Обсуждаются вопросы редукции многомерного пространства в одномерное при вычислении кратных интегралов.

Ключевые слова: рекурсивные развертки, трехмерная графика, компьютерная математика , кратные интегралы.