

УДК 004.9:51-37/-7

Хомченко А. Н.¹, Коваль Н. В.¹, Осипова Н. В.²¹Чорноморський національний університет імені Петра Могили, Миколаїв, Україна²Херсонський державний університет, Херсон, Україна**КОМП'ЮТЕРНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ ЗІ СКІНЧЕННИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ**

DOI: 10.14308/ite000648

У роботі розглянута задача побудови базисних функцій чотирикутного скінченного елемента n 'ятого порядку засобами системи комп'ютерної алгебри Maple. Лагранжева апроксимація такого скінченного елемента містить 36 вузлів: 20 вузлів по периметру та 16 внутрішніх вузлів. Розглянуто альтернативні моделі зі зменшеною кількістю внутрішніх вузлів. Наведено графіки базисних функцій та когнітивні портрети ліній нульового рівня. Робота направлена на дослідження можливостей застосування сучасних інформаційних технологій під час викладання окремих математичних дисциплін.

Ключові слова: інформаційні технології, комп'ютерні математичні пакети, Maple, комп'ютерна графіка, скінченні елементи.

Постановка проблеми

У сучасних умовах оновлення системи освіти та швидкого розвитку нових наукових теорій задача викладача точних дисциплін полягає в тому, що студентів потрібно навчити мислити, а не тільки вміти рахувати або підставляти у готові формули потрібні числа. Саме тому використання різноманітних інформаційних технологій в освіті останнім часом набуває все більшої популярності. Так, все частіше при вивченні математичних дисциплін використовуються спеціалізовані комп'ютерні математичні пакети, такі, як Mathcad, Mathematica, Maple або MATLAB. Використання інструментальних засобів дозволяє здійснювати складні математичні перетворення та обчислення, не допускаючи при цьому помилок. Сучасна тривимірна графіка таких програм допомагає наочно показати вигляд складних поверхонь, здійснюючи їх побудову та обертання. Система Maple включає в себе програмні модулі для алгебри, математичного аналізу, дискретної математики, побудови дво- та тривимірних графіків. Однією з головних особливостей математичного пакету Maple є відповідність структур команд і програмних процедур логіці математичного мислення. Особливо це важливо для студентів спеціальностей «комп'ютерні науки та інформаційні технології», «системний аналіз», «інженерія програмного забезпечення», а також для аспірантів спеціальності «інформаційні технології».

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Серед методів комп'ютерного аналізу, що застосовуються в автоматизованому проектуванні, найбільш широко використовується метод скінченних елементів [1-3]. За його допомогою розраховуються задачі теплообміну, розподілення магнітного поля, напруження, деформації, вирішувати які іншим методом виявляється важко. Моделювання функцій форм скінченних елементів завжди було цікавим аспектом наукових досліджень. Уперше базисні функції для лінійних, квадратичних та кубічних СЕ були знайдені підбором [4]. Алгебраїчний шлях побудови цих функцій наведений у [5]. Альтернативою цьому підходу стало геометричне моделювання [6-10], яке не лише спростило спосіб побудови базису, але й відкрило шлях для створення альтернативних моделей на елементах вищих порядків та



вивчення їх інтерполяційних властивостей. У [11] для побудови ряду серендипових елементів бікубічної інтерполяції використовуються засоби комп'ютерної графіки.

Мета статті

О. Зенкевич та К. Морган у [12, с. 182] вказують, що порівняння швидкостей збіжності при послідовному збільшенні ступеня многочлена (p-збіжність) інтерполяційного поліному та зменшенні розмірів розбиття на скінченні елементи (h-збіжність) приводить до висновків про переваги p-збіжності. Тому метою статті є актуальне питання побудови базисних функцій для елементів вищого порядку.

Результати дослідження

Спробуємо побудувати базисні форми для скінченного елемента (CE) із 20-ма вузлами по периметру стандартним матричним методом. Повна Лагранжева апроксимація для такого випадку повинна включати 16 внутрішніх вузлів (рис. 1).

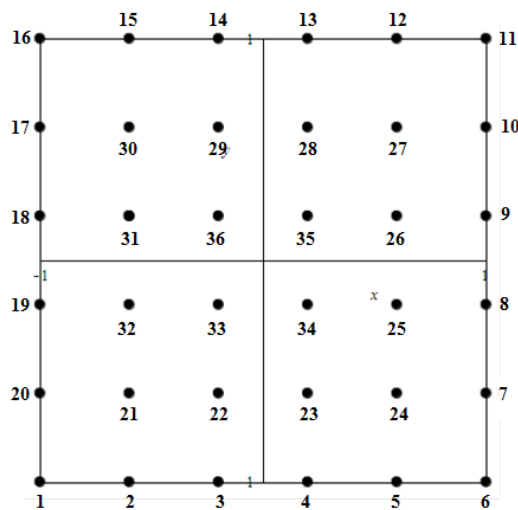


Рис. 1. Скінченний елемент n'ятого порядку CE-36.

При використанні алгебраїчного способу побудови базисних функцій для чотирикутних скінченних елементів необхідно побудувати інтерполяційний поліном двох аргументів, кількість членів якого дорівнює кількості вузлів скінченного елемента. Для наочного представлення складових членів-мономів інтерполяційного поліному використовують трикутник Паскаля (рис. 2).

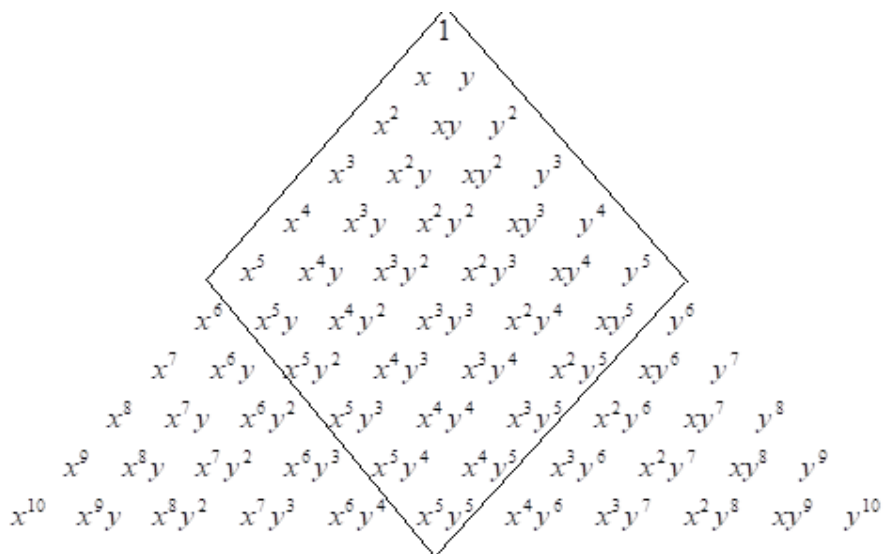


Рис. 2. Трикутник Паскаля з виділеними елементами для СК-36.

При зростанні кількості вузлів на сторонах квадрата можна отримувати поліноми будь-якого високого порядку. Однак у практичному застосуванні це призводить до надскладних обчислень: зростання кількості вузлів на сторонах елементів спричиняє надзвичайно швидкий ріст загальної кількості внутрішніх вузлів [13, с. 99].

Так, для скінченного елемента у формі Лагранжа із 36 вузлами (СК-36) інтерполяційний поліном містить 36 елементів:

$$\begin{aligned} N(x, y) = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + \\ & + a_{11}x^4 + a_{12}x^3y + a_{13}x^2y^2 + a_{14}xy^3 + a_{15}y^4 + a_{16}x^5 + a_{17}x^4y + a_{18}x^3y^2 + \\ & + a_{19}x^2y^3 + a_{20}xy^4 + a_{21}y^5 + a_{22}x^5y + a_{23}x^4y^2 + a_{24}x^3y^3 + a_{25}x^2y^4 + a_{26}xy^5 + \\ & + a_{27}x^5y^2 + a_{28}x^4y^3 + a_{29}x^3y^4 + a_{30}x^2y^5 + a_{31}x^5y^3 + a_{32}x^4y^4 + a_{33}x^3y^5 + \\ & + a_{34}x^5y^4 + a_{35}x^4y^5 + a_{36}x^5y^5. \end{aligned}$$

Побудований поліном повинен задовольняти інтерполяційній гіпотезі:

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik},$$

де i – номер базисної функції ($i = \overline{1, 36}$), k – номер вузла інтерполяції ($k = \overline{1, 36}$), δ_{ik} – символ Кронекера.

Отже, для знаходження базисних функцій необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь 36×36 . Такі великі системи зручно розв'язувати матричним методом. Однак слід зазначити, що обчислення визначника матриць такого розміру вручну вимагає акуратності та займає дуже багату часу. На сьогодні такі процедури стали можливі завдяки використанню сучасних комп'ютерних засобів. Всі обчислення ми проводили у програмі Maple (рис. 3).

Завдяки пакету Maple нами отримано базисні функції для скінченного елемента п'ятого порядку SE-36:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{589824} (x-1)(25x^2-1)(25x^2-9)(y-1)(25y^2-1)(25y^2-9);$$

$$N_2(x, y) = -\frac{25}{589824} (x^2-1)(25x^2-1)(5x-3)(y-1)(25y^2-1)(25y^2-9);$$

$$N_3(x, y) = \frac{25}{294912} (x^2-1)(25x^2-9)(5x-1)(y-1)(25y^2-1)(25y^2-9);$$

$$N_{21}(x, y) = \frac{625}{589824} (x^2-1)(25x^2-1)(5x-3)(y^2-1)(25y^2-1)(5y-3);$$

$$N_{22}(x, y) = -\frac{625}{294912} (x^2-1)(25x^2-9)(5x-1)(y^2-1)(25y^2-1)(5y-3);$$

$$N_{32}(x, y) = -\frac{625}{294912} (x^2-1)(25x^2-1)(5x-3)(y^2-1)(25y^2-9)(5y-1);$$

$$N_{33}(x, y) = \frac{625}{147456} (x^2-1)(25x^2-9)(5x-1)(y^2-1)(25y^2-9)(5y-1);$$

Шляхом циклічної перестановки, враховуючи симетрію, можна отримати повний набір функцій форм SE-36. Поверхні базисних функцій та області їх від'ємних значень наведені на рис. 4-10.

► **Matrix A**

$Q := \text{Matrix}([[1, x, y, x^2, x \cdot y, y^2, x^3, x^2 \cdot y, x \cdot y^2, y^3, x^4, x^3 \cdot y, x^2 \cdot y^2, x \cdot y^3, y^4, x^5, x^4 \cdot y, x^3 \cdot y^2, x^2 \cdot y^3, x \cdot y^4, y^5, x^4 \cdot y^2, x^3 \cdot y^3, x^2 \cdot y^4, x \cdot y^5, x^5 \cdot y^2, x^4 \cdot y^3, x^3 \cdot y^4, x^2 \cdot y^5, x^5 \cdot y^3, x^4 \cdot y^4, x^3 \cdot y^5, x^4 \cdot y^5, x^5 \cdot y^5]]);$

$\left[\begin{array}{l} 1 \times 36 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{array} \right]$ **(1)**

▼ **N1**

$CI := \text{Matrix}([[1], [0]]);$

$\left[\begin{array}{l} 36 \times 1 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{array} \right]$ **(3.1)**

$RI := A^{-1} \cdot CI;$

$\left[\begin{array}{l} 36 \times 1 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{array} \right]$ **(3.2)**

$MI := Q \cdot RI;$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{625}{65536} x^4 + \frac{9}{65536} x y + \frac{125}{32768} x^2 y + \frac{125}{32768} x y^2 - \frac{125}{32768} x^3 y + \frac{15625}{147456} x^2 y^2 - \frac{125}{32768} x y^3 - \frac{625}{65536} x^4 y - \frac{15625}{147456} x^3 y^2 \\ - \frac{15625}{147456} x^2 y^3 - \frac{625}{65536} x y^4 + \frac{625}{65536} x^5 y - \frac{78125}{294912} x^4 y^2 + \frac{15625}{147456} x^3 y^3 - \frac{78125}{294912} x^2 y^4 + \frac{625}{65536} x y^5 + \frac{78125}{294912} x^5 y^2 \\ + \frac{78125}{294912} x^4 y^3 + \frac{78125}{294912} x^3 y^4 + \frac{78125}{294912} x^2 y^5 - \frac{78125}{294912} x^5 y^3 + \frac{390625}{589824} x^4 y^4 - \frac{78125}{294912} x^3 y^5 - \frac{390625}{589824} x^5 y^4 - \frac{390625}{589824} x^4 y^5 \\ + \frac{390625}{589824} x^5 y^5 - \frac{625}{65536} y^5 + \frac{125}{32768} y^3 + \frac{125}{32768} x^3 - \frac{125}{32768} y^2 - \frac{125}{32768} x^2 + \frac{9}{65536} + \frac{625}{65536} y^4 - \frac{625}{65536} x^5 - \frac{9}{65536} x \\ - \frac{9}{65536} y \end{array} \right]$$
 (3.3)

Рис. 3. Здійснення обчислень у пакеті Maple.

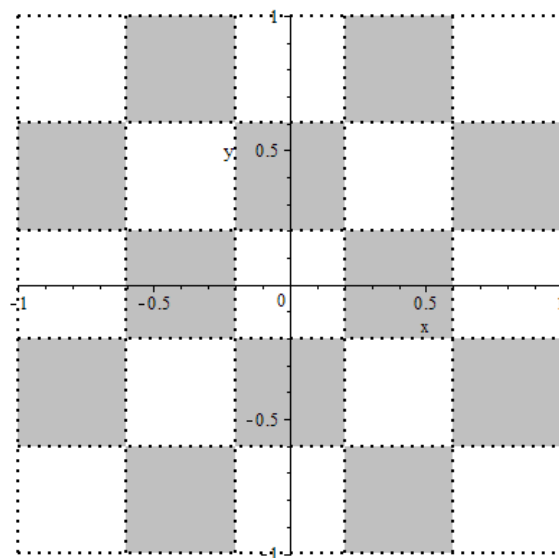
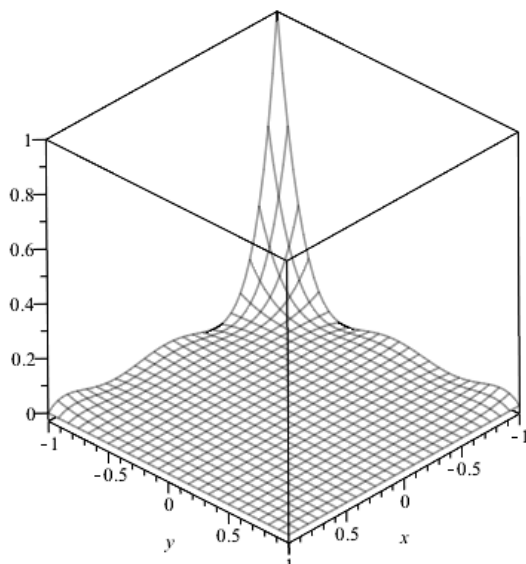


Рис. 4. Графік базисної функції $N_1(x, y)$ та області її від'ємних значень.

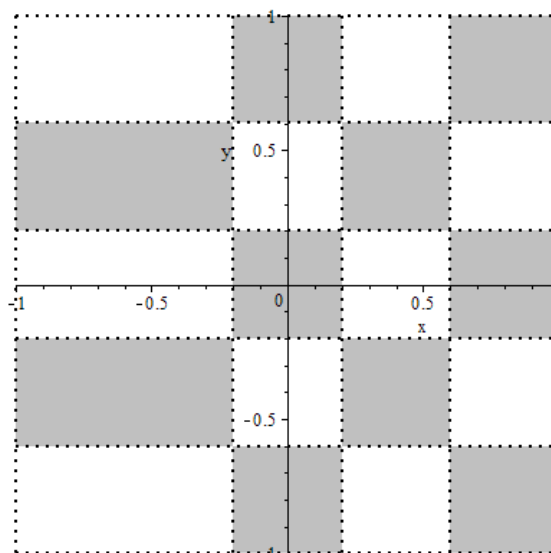
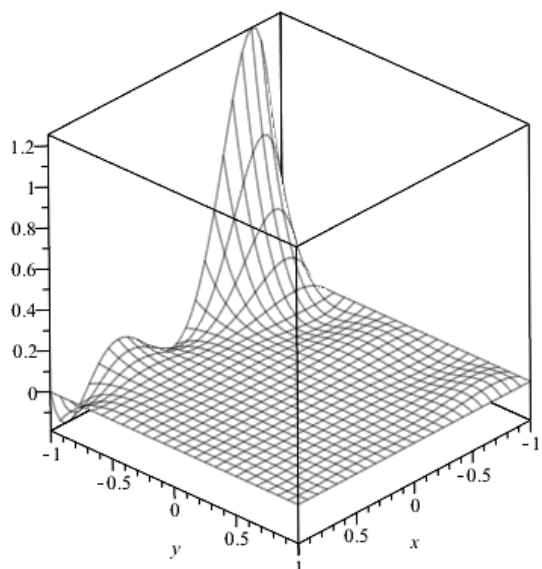


Рис. 5. Графік базисної функції $N_2(x, y)$ та області її від'ємних значень.

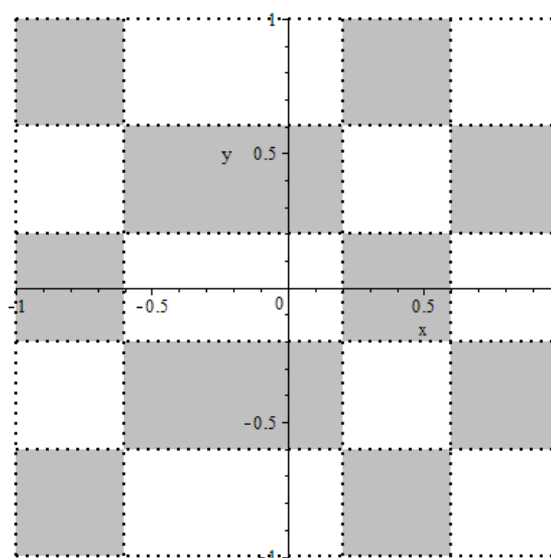
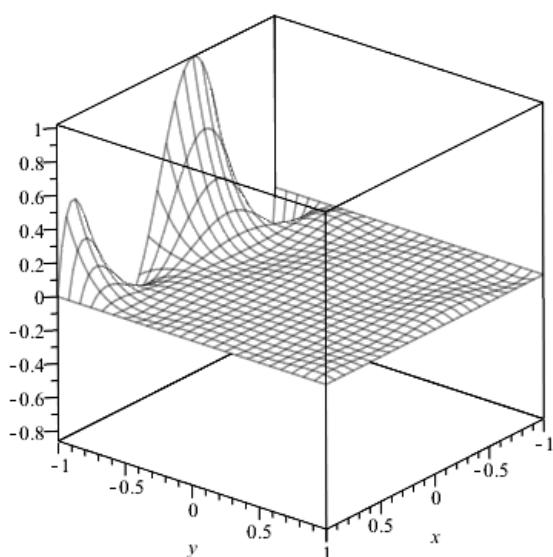


Рис. 6. Графік базисної функції $N_3(x, y)$ та області її від'ємних значень.

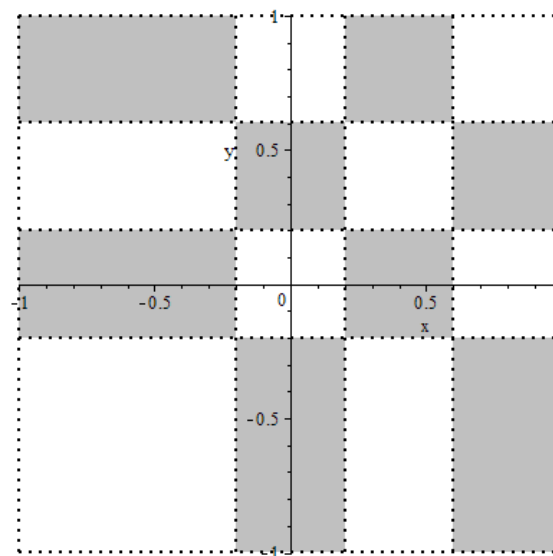
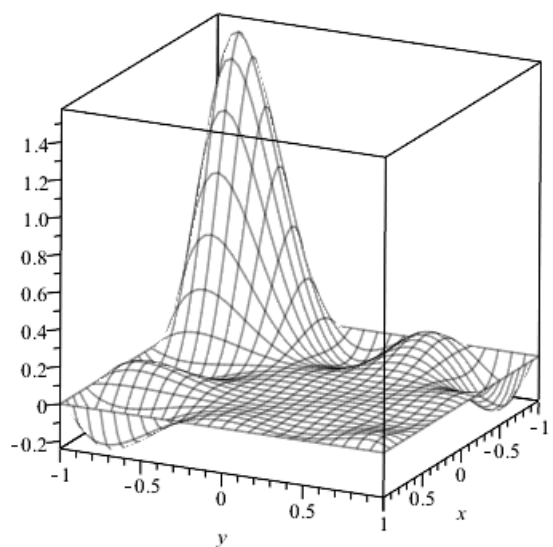


Рис. 7. Графік базисної функції $N_{21}(x, y)$ та області її від'ємних значень.

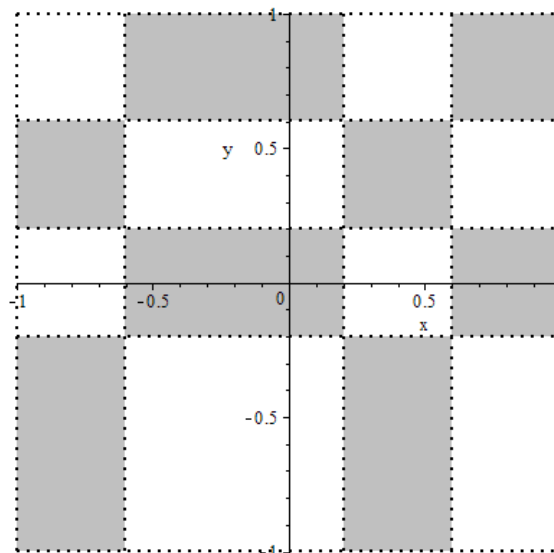
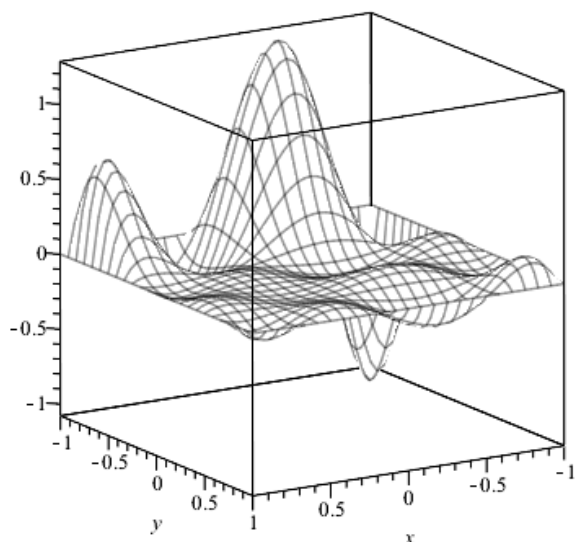


Рис. 8. Графік базисної функції $N_{22}(x, y)$ та області її від'ємних значень.

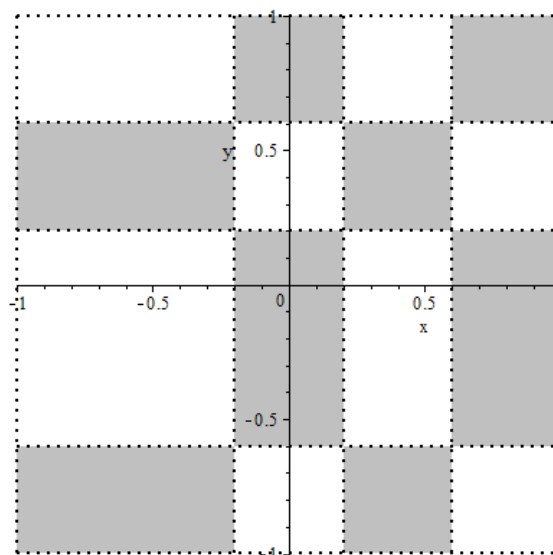
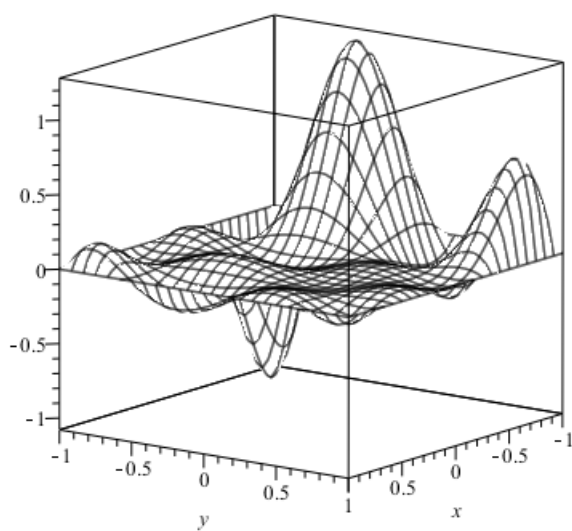


Рис. 9. Графік базисної функції $N_{32}(x, y)$ та області її від'ємних значень.

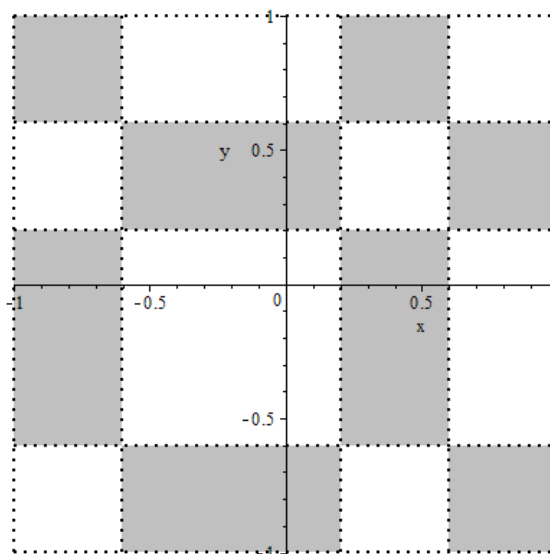
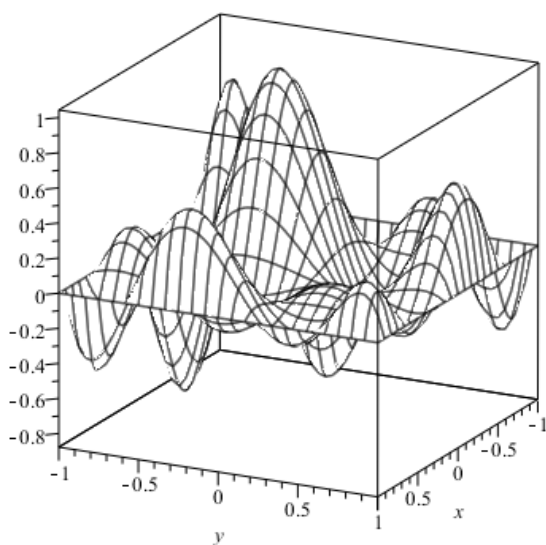


Рис. 10. Графік базисної функції $N_{33}(x, y)$ та області її від'ємних значень.

Спробуємо виключити якомога більше внутрішніх вузлів. Трикутник Паскаля підказує варіант побудови поліному із 21 членом (6 повних рядків), для чого додамо один внутрішній вузол (0; 0) (рис. 11, рис. 12):

$$N(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^4 + a_{12}x^3y + a_{13}x^2y^2 + a_{14}xy^3 + a_{15}y^4 + a_{16}x^5 + a_{17}x^4y + a_{18}x^3y^2 + a_{19}x^2y^3 + a_{20}xy^4 + a_{21}y^5.$$

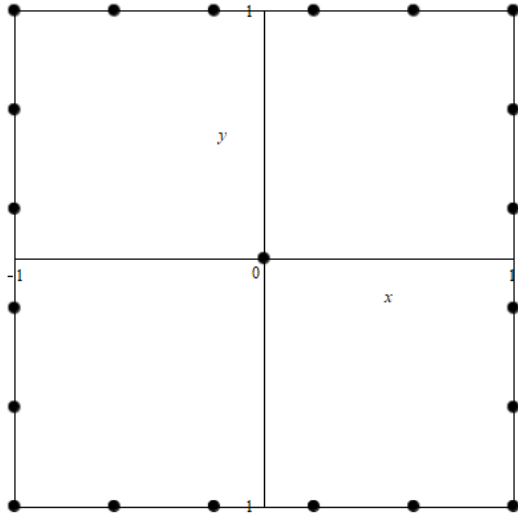


Рис. 11. Скінченний елемент n'ятого порядку із одним внутрішнім вузлом.

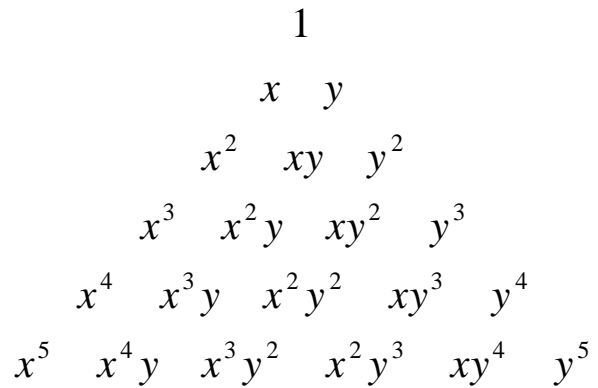


Рис. 12. Трикутник Паскаля для скінченного елемента із 21 вузлом.

Однак обчислення показали, що у такому випадку матриця є виродженою, тобто система не має розв'язків.

Подальші розмірковування приводять до ідеї використання п'яти додаткових внутрішніх вузлів. У залежності від розташування таких вузлів ми розглянемо два випадки:

- класичний «хрест», що розміщений на осях координат (рис. 13);
- косий або ортогональний «хрест», отриманий поворотом класичного «хреста» на 45° (рис. 14).

(рис. 14).

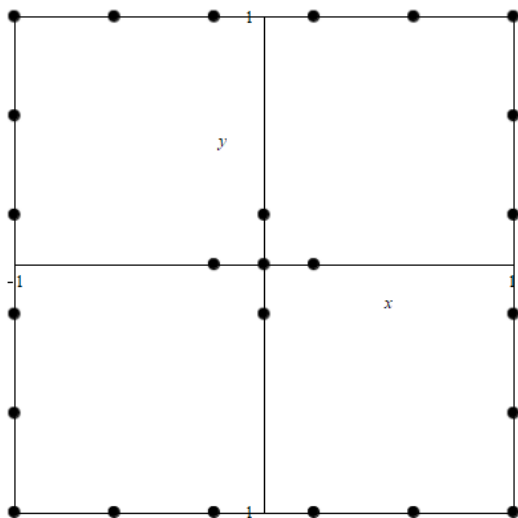


Рис. 13. Скінченний елемент n'ятого порядку із п'ятьма внутрішніми вузлами у формі класичного «хреста».

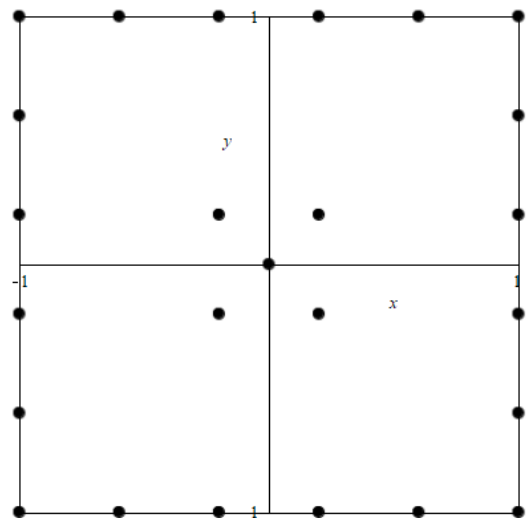


Рис. 14. Скінченний елемент n'ятого порядку із п'ятьма внутрішніми вузлами у формі косого «хреста».

Інтерполяційний поліном для базисних функцій буде містити 25 членів (рис. 15):

$$N(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^4 + a_{12}x^3y + a_{13}x^2y^2 + a_{14}xy^3 + a_{15}y^4 + a_{16}x^5 + a_{17}x^4y + a_{18}x^3y^2 + a_{19}x^2y^3 + a_{20}xy^4 + a_{21}y^5 + a_{22}x^5y + a_{23}x^4y^2 + a_{24}x^3y^3 + a_{25}x^2y^4 + a_{25}xy^5.$$

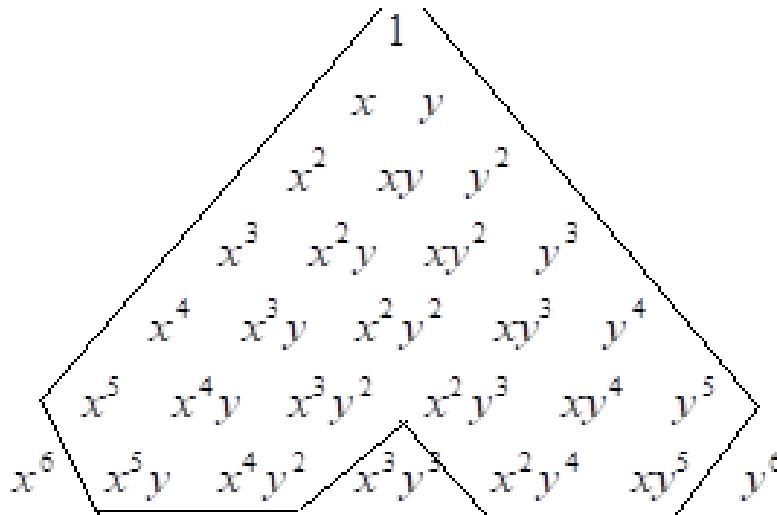


Рис. 15. Трикутник Паскаля для скінченного елемента із 25 вузлами.

Для того, аби зняти всі питання про наявність єдиних базисних функцій для скінченного елемента п'ятого порядку із 5 внутрішніми кутами, задамо координати внутрішніх вузлів косоного «хреста» (рис. 14) у загальному вигляді: $\left(-\frac{n}{10}; -\frac{n}{10}\right)$, $\left(\frac{n}{10}; -\frac{n}{10}\right)$, $\left(\frac{n}{10}; \frac{n}{10}\right)$, $\left(-\frac{n}{10}; \frac{n}{10}\right)$. Матриця коефіцієнтів навіть у такому узагальненому вигляді виявляється виродженою.

Розглянемо скінченний елемент п'ятого порядку із п'ятьма внутрішніми вузлами, що утворюють класичний (прямий) «хрест» (рис. 13). Інтерполяційний поліном для базисних функцій не зміниться. Відразу дослідимо узагальнений прямий «хрест», де внутрішні вузли мають координати $\left(0; -\frac{n}{10}\right)$, $\left(\frac{n}{10}; 0\right)$, $\left(0; \frac{n}{10}\right)$, $\left(-\frac{n}{10}; 0\right)$. У такому випадку система лінійних рівнянь буде мати єдиний розв'язок для кожного значення параметра n . Запишемо узагальнені формули з параметром n для побудови альтернативних базисних функцій чотирикутного скінченного елемента п'ятого порядку із п'ятьма внутрішніми вузлами:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{6144(n^2 - 100)} (y-1)(x-1) \left(25n^4(x^2y + xy^2 + x^2 + 2xy + y^2 + x + y) - 2500n^2(x^4 + x^3y + xy^3 + y^4 + x^3 + y^3 + x^2 + y^2) - 3500n^2(x^2y + xy^2) - 3464n^2xy + 250000(x^4 + y^4) + 246400(x^3y + xy^3 + x^3 + y^3) - 2464n^2(x + y) + 100000(x^2y + xy^2) - 146400xy \right);$$

$$N_2(x, y) = \frac{25}{6144(n^2 - 100)} (y - 1)(x^2 - 1)(5n^4xy + 5n^4x - 500n^2x^3 - 300n^2x^2y - 520n^2xy - 500n^2x + 12n^2y + 50000x^3 + 30000x^2y - 1200y^3 + 2000xy);$$

$$N_3(x, y) = -\frac{25}{3072(n^2 - 100)} (y - 1)(x^2 - 1)(5n^4xy + 5n^4x - 500n^2x^3 - 100n^2x^2y - 680n^2xy - 500n^2x + 36n^2y + 50000x^3 + 10000x^2y - 3600y^3 + 1800xy);$$

$$N_4(x, y) = \frac{25}{3072(n^2 - 100)} (y - 1)(x^2 - 1)(5n^4xy + 5n^4x - 500n^2x^3 + 100n^2x^2y - 680n^2xy - 500n^2x - 36n^2y + 50000x^3 - 10000x^2y + 3600y^3 + 1800xy);$$

$$N_5(x, y) = -\frac{25}{6144(n^2 - 100)} (y - 1)(x^2 - 1)(5n^4xy + 5n^4x - 500n^2x^3 + 300n^2x^2y - 520n^2xy - 500n^2x - 12n^2y + 50000x^3 - 30000x^2y + 12600y^3 + 2000xy);$$

$$N_{21}(x, y) = \frac{500}{n^2(n^2 - 100)} y(y^2 - 1)(x^2 - 1)(n - 10y);$$

$$N_{25}(x, y) = \frac{1}{n^2} (y^2 - 1)(x^2 - 1)(n^2 - 100x^2 - 100y^2).$$

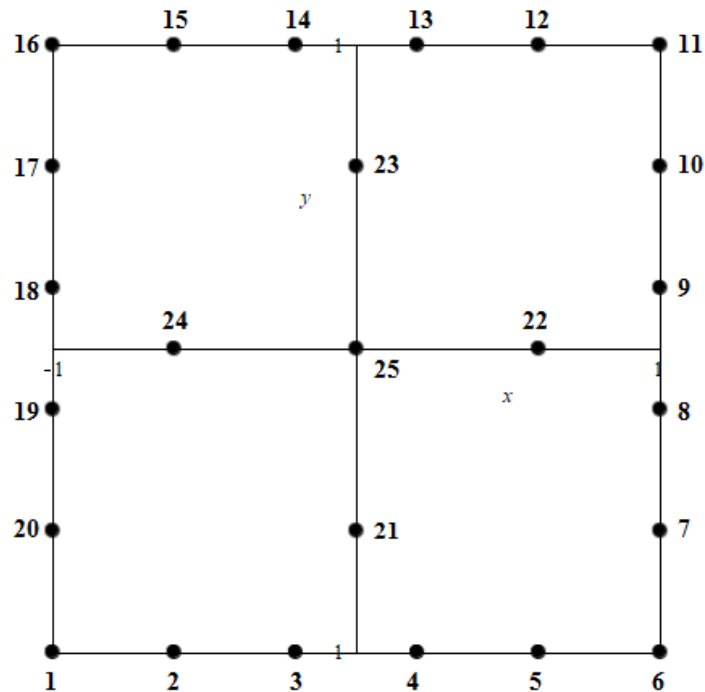


Рис. 16. Скінченний елемент n 'ятого порядку із n 'ятьма внутрішніми вузлами у формі «класичного» хреста при $n = 6$.

Змінюючи параметр n у наведених формулах, отримуємо всю множину альтернативних моделей та, використовуючи візуалізацію за допомогою засобів Maple, проводимо дослідження поверхні функції форми і перевірку властивостей, що притаманні функціям форми у методі скінченних елементів.

Наприклад, при $n = 6$ базисні функції для скінченного елемента, наведеного на рис. 16, матимуть вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{24576} (x-1)(y-1)(10000x^4 + 9775x^3y + 9775xy^3 + 10000y^4 + 9775x^3 + \\ - 400x^2y + 400xy^2 + 9775y^3 - 3600x^2 - 12894xy - 3600y^2 - 3519x - 3519y);$$

$$N_2(x, y) = -\frac{25}{24576} (y-1)(x^2-1)(2000x^3 - 1200x^2y - 75y^3 - 640xy - 720x + 27y);$$

$$N_3(x, y) = \frac{25}{12288} (y-1)(x^2-1)(2000x^3 + 400x^2y - 225y^3 - 720x + 81y);$$

$$N_{21}(x, y) = \frac{125}{288} y(y^2-1)(x^2-1)(5y-3);$$

$$N_{25}(x, y) = -\frac{1}{9} (y^2-1)(x^2-1)(25x^2 + 25y^2 - 9).$$

Поверхні базисних функцій та області їх від'ємних значень наведені на рис. 17-21.

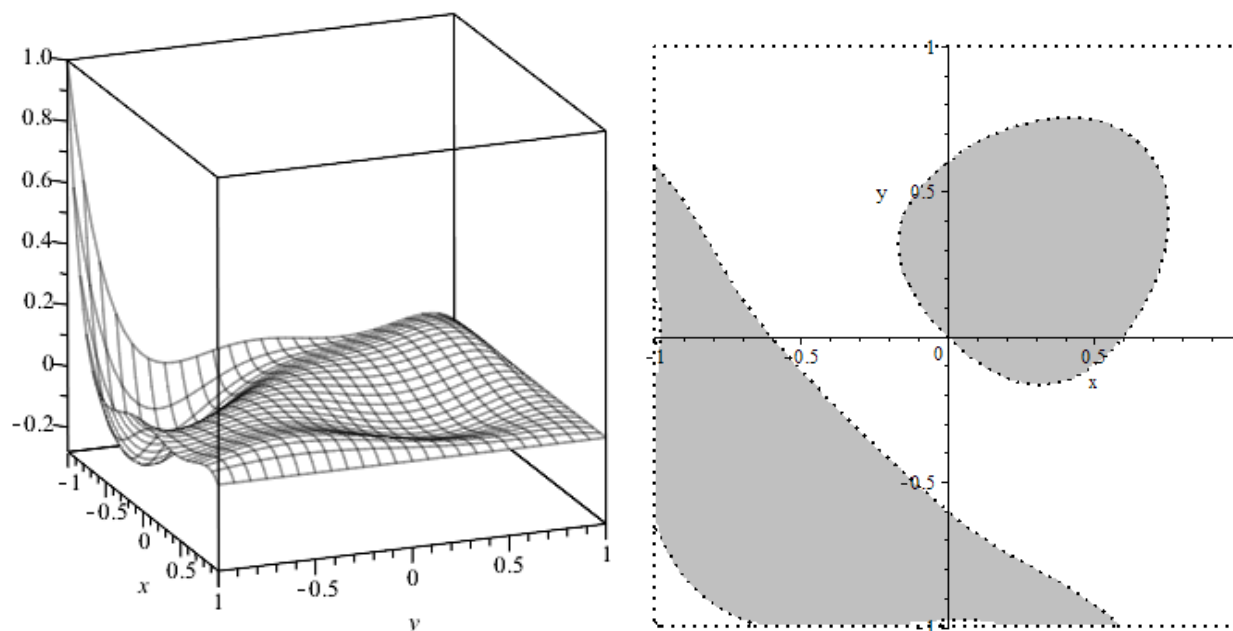


Рис. 17. Графік базисної функції $N_{33}(x, y)$ та області її від'ємних значень $N_1(x, y)$.

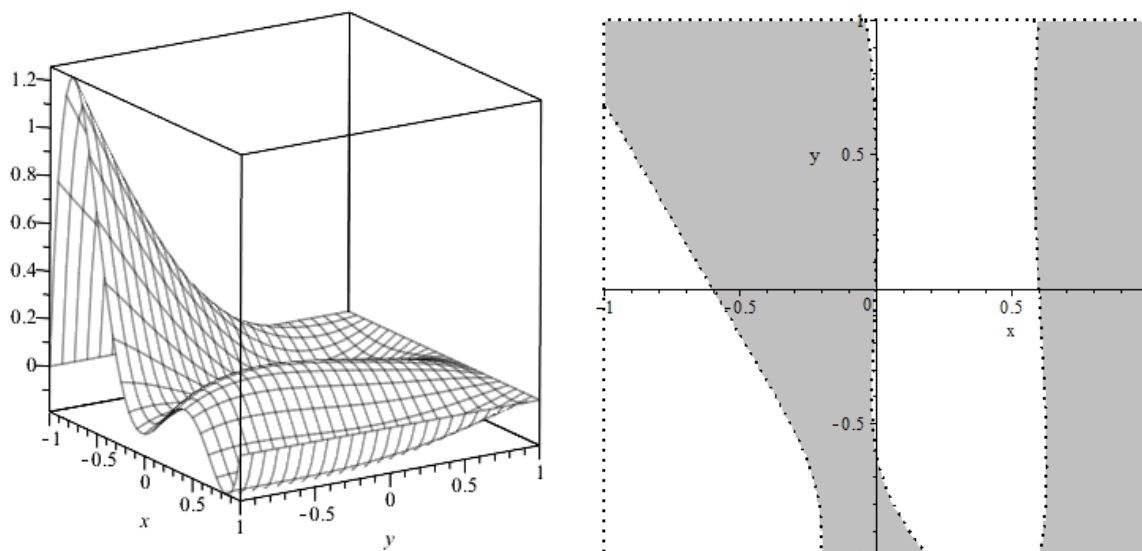


Рис. 18. Графік базисної функції $N_{33}(x, y)$ та області її від'ємних значень $N_2(x, y)$.

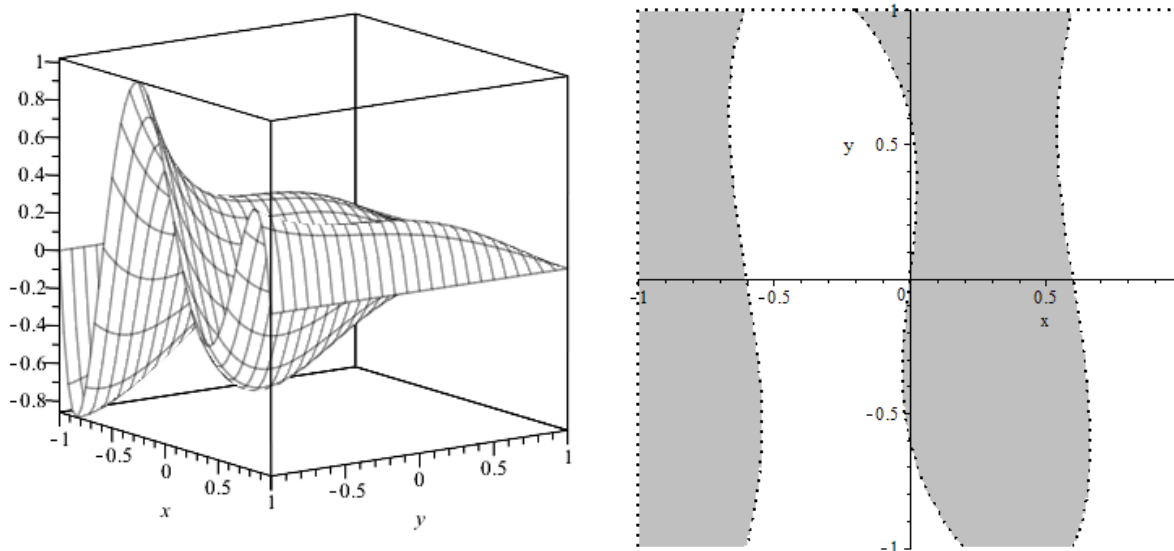


Рис. 19. Графік базисної функції $N_{33}(x, y)$ та області її від'ємних значень $N_3(x, y)$.

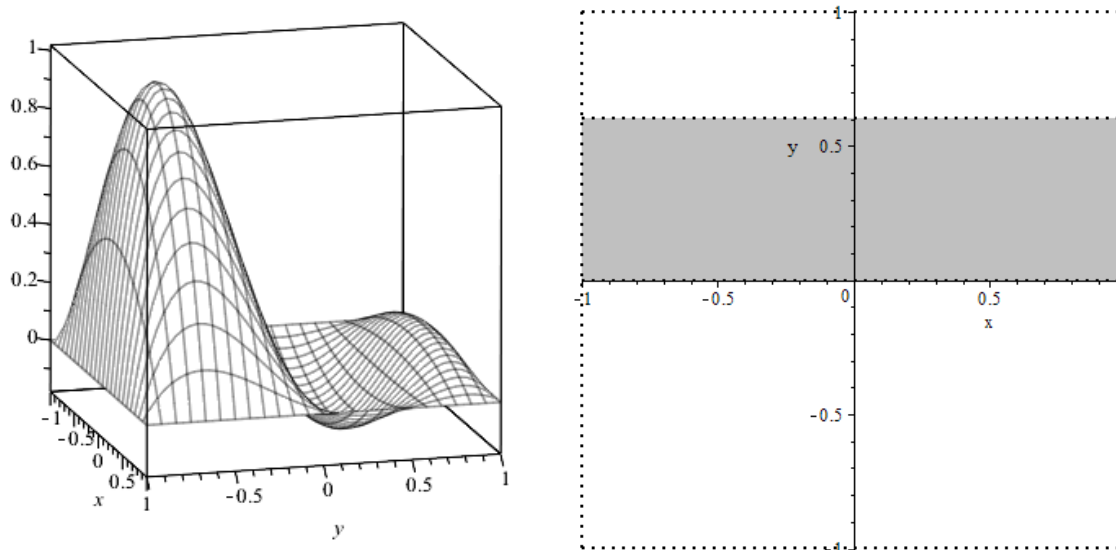


Рис. 20. Графік базисної функції $N_{33}(x, y)$ та області її від'ємних значень $N_{21}(x, y)$.

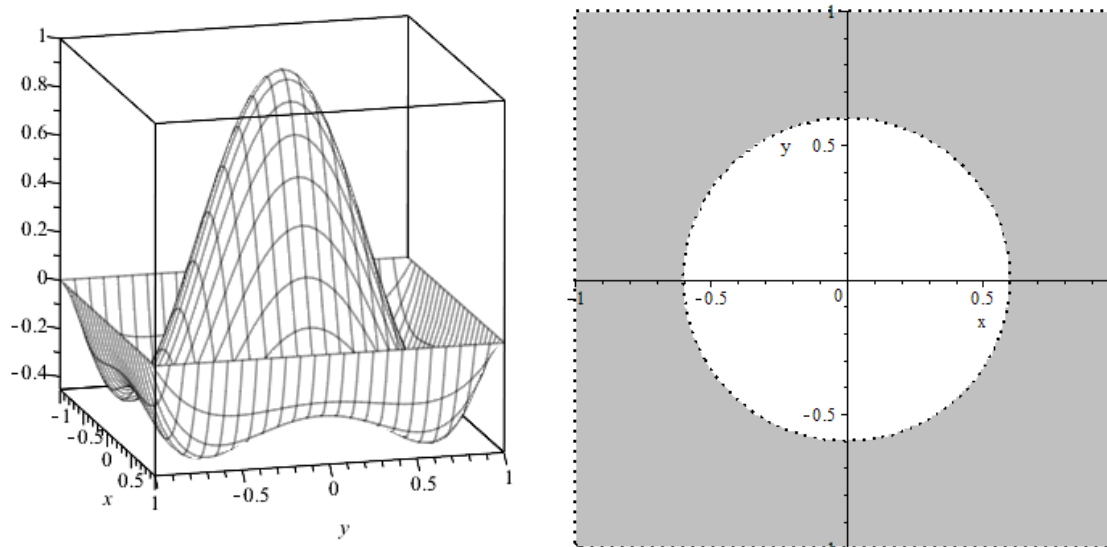


Рис. 21. Графік базисної функції $N_{33}(x, y)$ та області її від'ємних значень $N_{25}(x, y)$.

В якості самостійної роботи можна запропонувати студентам побудувати наведені базисні функції для одиничного квадрата ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$).

Висновки та перспективи подальших досліджень.

Побудова функцій форм скінченних елементів вищих порядків алгебраїчним методом стала можливою завдяки використанню спеціалізованих пакетів прикладних програм. У роботі засобами системи комп'ютерної алгебри Maple побудовано базисні функції для скінченного елемента п'ятого порядку SE-36. За допомогою когнітивно-графічного аналізу отриманих ліній нульового рівня можна проаналізувати вигляд поверхонь функцій форм SE. У подальшому планується розглянути скінченний елемент п'ятого порядку з чотирма внутрішніми точками та серендипів скінченний елемент п'ятого порядку ССК-20.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Зенкевич, О. (1975). *Метод конечных элементов в технике*. Москва: Мир.
2. Зенкевич, О. & Чанг, И. (1974). *Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошной среды*. Москва: Недра.
3. Толок, В.А., Киричевский, В.В., Гоменюк, С.И., Гребенюк, С.Н. & Бувайло, Д.П. (2003). *Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация*. Київ : Наукова думка.
4. Норри, Д. & де Фриз, Ж. (1981). *Введение в метод конечных элементов*. Москва : Мир.
5. Сегерлинд, Л. (1979). *Применение метода конечных элементов*. Москва : Мир.
6. Камаева, Л. И. & Хомченко, А. Н. (1988). Вычислительные эксперименты с альтернативными базисами серендиповых аппроксимаций. *Прикл. пробл. прочности и пластичности. Анализ и оптимизация деформируемых систем. Всесоюз. межвуз. сб.*, 39, 103-105.
7. Камаева, Л. И. & Хомченко, А. Н. (1985). *Новые модели конечных элементов серендипова семейства*. Ивано-Франковск.
8. Хомченко, А. Н. & Камаева, Л. И. (1987). *Геометрические аспекты серендиповых аппроксимаций*. Ивано-Франковск.
9. Хомченко, А. Н., Литвиненко, Е. И. & Гучек, П. И. (1996). Геометрия серендиповых аппроксимаций. *Прикл. геом. и инж. графика*, 59, 40-42.
10. Камаева, Л. И. & Хомченко, А. Н. (1985). О моделировании конечных элементов серендипова семейства. *Прикл. пробл. прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб.*, 31, 14-17.

11. Хомченко, А.Н., Коваль, Н.В. & Осипова, Н.В. (2016). Когнитивная компьютерная графика как средство «мягкого» моделирования в задачах восстановления функций двух переменных. *Информационные технологии в образовании*, 28, 7-18. DOI: 10.14308/ite000599.
12. Зенкевич, О. & Морган, К. (1986). *Конечные элементы и аппроксимация*. Москва : Мир.
13. Стренг, Г. & Фикс, Дж. (1977). *Теория метода конечных элементов*. Москва : Мир.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Zienkiewicz, O. (1975). *The finite element method in engineering science*. Moscow: Mir.
2. Zienkiewicz, O. & Chang, I. (1974). *The finite element method in the theory of structures and the mechanics of a continuous medium*. Moscow: Nedra.
3. Tolok, V.A., Kyrychevskiy, V.V., Gomeniuk, S.I., Hrebenuk, S.N. & Buvailo, D.P. (2003). *Finite element method: theory, algorithms, implementation*. Kyiv: Naukova dumka.
4. Norrie, D. & Vriez, Zh. (1981). *An Introduction to Finite Element Analysis*. Moscow: Mir.
5. Segerlind, L. (1979). *Applied Finite Element Analysis*. Moscow: Mir.
6. Kamaeva, L. Y. & Khomchenko, A. N. (1988). Computational experiments with alternative bases serendipity approximations, *Prykl. probl. prochnosti y plastychnosti. Analiz y optymizatsiya deformyruemykh system. Vsesoiuz. mezhvuz. sb.*, 39, 103-105.
7. Kamaeva, L. Y. & Khomchenko, A. N. (1985). *New finite element models of the Serendip family*. Yvano-Frankovsk.
8. Khomchenko, A. N. & Kamaeva, L. Y. (1987). *Geometric aspects of serendipity approximations*. Yvano-Frankovsk.
9. Khomchenko, A. N. & Litvinenko, E. Y., Guchek, P. Y. (1996). Geometry of the Serendip Approximations. *Prykl. heom. y ynzh. hrafyka*, 59, 40-42.
10. Kamaeva, L. Y. & Khomchenko, A. N. (1985). On the modeling of finite elements of the Serendip family. *Prykl. probl. prochnosti y plastychnosti. Alhorytmizatsiya y avtomatyzatsiya resheniya zadach upruhosty y plastychnosti. Vsesoiuz. mezhvuz. sb.*, 31, 14-17.
11. Khomchenko, A.N., Koval, N.V. & Osipova, N.V. (2016). Cognitive computer graphics as a means of "soft" modeling in problems of restoration of functions of two variables. *Information Technologies in Education*, 28, 7-18. DOI: 10.14308/ite000599.
12. Zienkiewicz, O. & Morgan, K. (1986). *Finite Elements and Approximation*. Moscow: Mir.
13. Strang, H. & Fix, Dzh. (1977). *An Analysis of the Finite Element Method*. Moscow: Mir.

Стаття надійшла до редакції 17.08.2017.

The article was received 18 November 2017.

Anatoliy Khomchenko¹, Natalia Koval¹, Natalia Osipova²

¹**Petro Mohyla Black Sea National University, Mykolaiv, Ukraine**

²**Kherson State University, Kherson, Ukraine**

COMPUTER EXPERIMENTS WITH FINITE ELEMENTS OF HIGHER ORDER

The paper deals with the problem of constructing the basic functions of a quadrilateral finite element of the fifth order by the means of the computer algebra system Maple. The Lagrangian approximation of such a finite element contains 36 nodes: 20 nodes perimeter and 16 internal nodes. Alternative models with reduced number of internal nodes are considered. Graphs of basic functions and cognitive portraits of lines of zero level are presented. The work is aimed at studying the possibilities of using modern information technologies in the teaching of individual mathematical disciplines.

Keywords: information technology, computer mathematical packages, Maple, computer graphics, finite elements.

Хомченко А. Н.¹, Коваль Н. В.¹, Осипова Н. В.²

¹Черноморский национальный университет имени Петра Могилы, Николаев, Украина

²Херсонский государственный университет, Херсон, Украина

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В работе рассмотрена задача построения базисных функций четырехугольного конечного элемента пятого порядка средствами системы компьютерной алгебры Maple. Лагранжева аппроксимация такого конечного элемента содержит 36 узлов: 20 узлов по периметру и 16 внутренних узлов. Рассмотрены альтернативные модели с уменьшенным количеством внутренних узлов. Приведены графики базисных функций и когнитивные портреты линий нулевого уровня. Работа направлена на исследование возможностей применения современных информационных технологий при преподавании отдельных математических дисциплин.

Ключевые слова: информационные технологии, компьютерные математические пакеты, Maple, компьютерная графика, конечные элементы.