

УДК 371.1

## ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ППЗ “БН “АЛГЕБРА 7-9”

Сметанюк Л.В.

Херсонський державний університет

*Дана стаття присвячена можливостям використання педагогічного програмного засобу “Бібліотека електронних наочностей “Алгебра 7-9” вчителями математики при викладанні теми «Задачі з параметрами» методом наглядно-графічних інтерпретацій.*

*Ключові слова: задачі з параметрами, графічний метод, шкільна система комп'ютерної алгебри.*

### Вступ

Задачі з параметрами – це задачі, які мають високу діагностичну цінність. Розв'язання задач цього типу потребує знання властивостей функцій і рівнянь, вміння виконувати алгебраїчні перетворення, високої логічної культури, доброї техніки дослідження, міцних знань теоретичного матеріалу, вміння поєднувати в єдине ціле знання з кількох розділів математики. Не кожному учню це під силу і тому не дивно, що розв'язування задач з параметрами завжди викликало і викликає великі труднощі у учнів[1;2].

І якщо декілька років тому задачі з параметрами зустрічалися тільки на вступних іспитах до вищих навчальних закладів, то сьогодні аналіз навчальних програм з математики для середніх загальноосвітніх навчальних закладів України показує, що вони є в багатьох темах елементарної математики: дослідження квадратичної функції, розміщення коренів квадратного рівняння відносно заданих чисел, розв'язання раціональних, показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь і нерівностей та ін.

До того ж, на жаль, і учителі загальноосвітніх шкіл задачам з параметрами приділяють менш уваги, ніж іншим темам. Багато в чому це пов'язано зі складністю унаочнити традиційними методами динамічні математичні об'єкти, що розглядаються у таких задачах, та інколи недостатньою кількістю часу ґрунтовно розібрати алгоритм рішення хоча б однієї з них протягом уроку.

Існують два основних методи розв'язання задач з параметрами: аналітичний метод та метод наглядно – графічних інтерпретацій. І перший, і другий методи можна ефективно підтримати сучасними педагогічними програмними засобами (ППЗ) [3;4;5].

В даній статті розглядаються можливості розв'язування задач з параметрами методом наглядно-графічних інтерпретацій за допомогою ППЗ “Бібліотека електронних наочностей “Алгебра 7-9” (БН “Алгебра 7-9”).

БН “Алгебра 7-9” розроблена у НДІ інформаційних технологій Херсонського державного університету та фактично є шкільною системою комп'ютерної алгебри, яка призначена для використання на уроках алгебри в 7-9 класах загальноосвітньої школи вчителями математики - при підготовці до проведення уроків, самостійних або контрольних робіт, учнями – при виконання домашніх завдань.

Для підтримки розв'язування графічних задач у цій системі спеціально створено програмний модуль (ПМ) **Графіки**, функціональні можливості якого залежать від класу навчання і розширюються від класу до класу. Він надає можливість не тільки створювати а і демонструвати кроки побудови графічних зображень на координатній площині та числовій вісі.

ПМ **Графіки** можна ефективно використовувати на практичних заняттях для розв'язання алгебраїчних задач графічним способом, дослідження властивостей графіків функцій, дослідження математичних моделей фізичних та інших природничих явищ графічним методом. Ознайомитися з усіма можливостями ППЗ БН “Алгебра 7-9” та його ПМ

**Графіки** можна скориставшись настановами користувача та методичними рекомендаціями вчителям [6; 7; 12].

## ПМ Графіки

Запуск ПМ **Графіки** здійснюється після проходження персоніфікації з головного меню програми БН “Алгебра 7-9”, при цьому попередньо вибирається клас навчання (в нашому випадку 9 клас) за допомогою виконання наступних кроків:

1. Головне меню/Навчальна програма/9 клас.
2. Головне меню/Інструмент/Графіки.

Після виконання цих кроків відкриється вікно ПМ **Графіки**, основними елементами інтерфейсу (рис.1) якого є:

1. Головне меню.
2. Режим.
3. Вікно відображення графіків.
4. Поле побудувань.
5. Довідник.
6. Вкладки довідника.
7. Шаблон введення.
8. Редактор формул.
9. Кнопка *Виконати*.

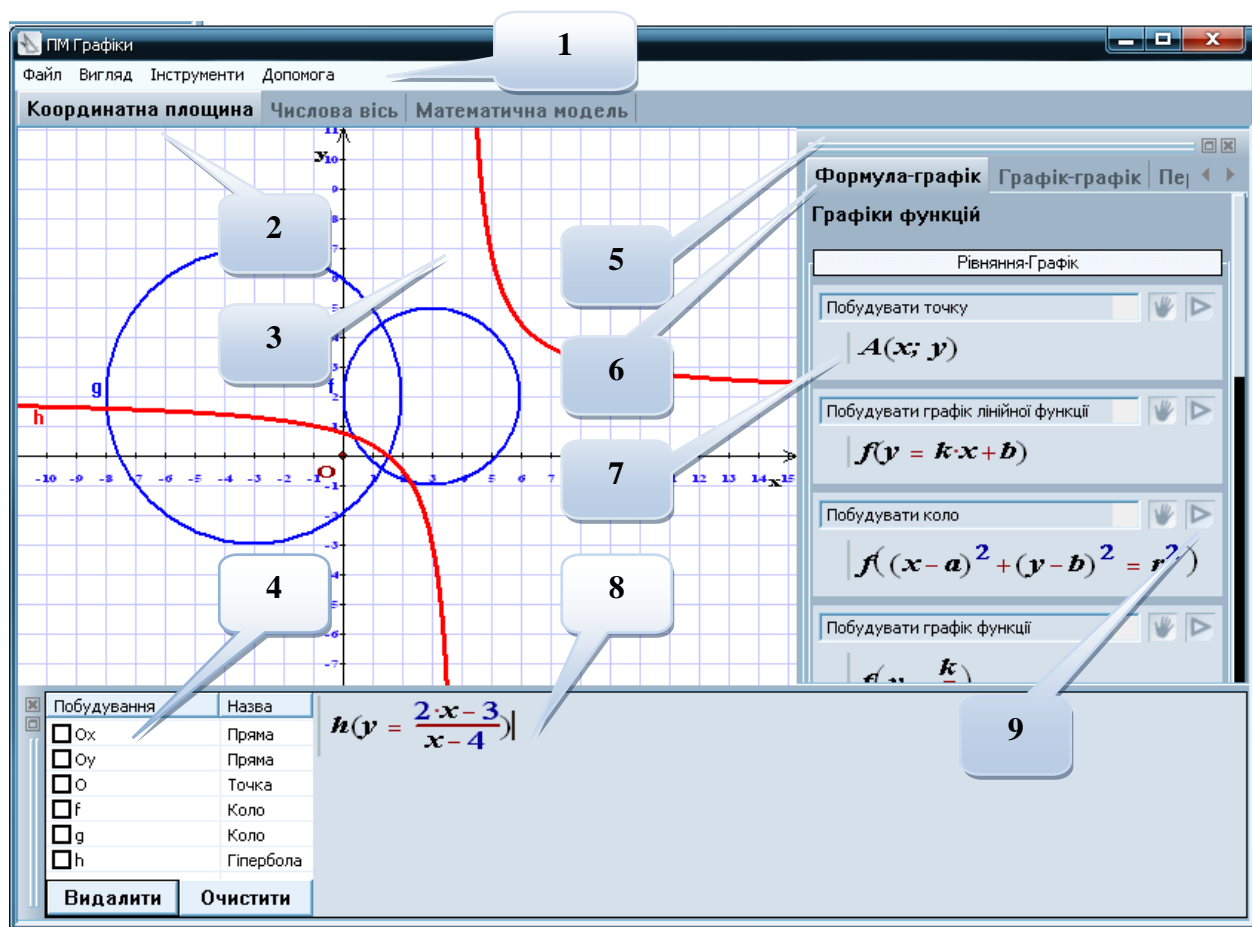


Рис .1. Основні елементи інтерфейсу ПМ Графіки.

Можливості роботи ПМ **Графіки** у двох режимах (побудови та демонстрації), даних елементів інтерфейсу та більш детально використання функцій головного меню, наприклад,

таких, як зміна кольору та товщини ліній, продемонструємо при розв'язанні наступних задач[8;9]. Їх умова була підібрана так, щоб проілюструвати не тільки технічні можливості ПМ **Графіки**, а і два основних графічних прийоми розв'язання задач з параметрами в залежності від ролі параметра (нерівноправна або рівноправна зі змінною):

- перший - побудова графічного образу на координатній площині – (x;y);
- другий – побудова графічного образу на координатній площині - (x;a).

Також зауважимо, в ході рішення задач не описується процес побудування графіків функцій та рівнянь «по точках», оскільки вважається, що при розв'язанні задач з параметрами у учня повинні бути сформовані основи графічної культури[1;2;9].

**Задача 1.** При яких значеннях параметра  $a$  система рівнянь  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a. \end{cases}$  має тільки один

розв'язок?

**Розв'язання.**

**Ідея.** Графіком рівняння  $x^2 + y^2 = 4$  є коло з центром в початку координат та радіусом 2. Функція  $y = x^2 + a$  задає сімейство парабол, вершини яких лежать на вісі ОУ. Дана система матиме один розв'язок, коли графік параболи та графік кола будуть мати одну точку дотику.

**Режим побудування.** Будуємо графічний образ на координатній площині – (x;y). Після запуску ПМ **Графіки** виконаємо наступні дії:

1. *Головне меню/Нова задача.*
2. В діалоговому вікні, що відкрилося (рис.2), за допомогою панелі шаблонів математичного редактора( ПШМР) введемо умову задачі.

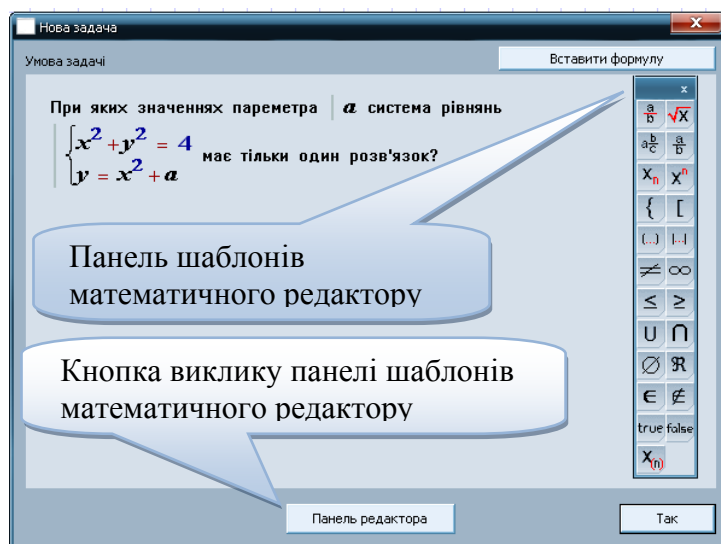


Рис.2. Діалогове вікно «Нова задача»

3. Змінимо масштаб координатної площини: *Головне меню/Вигляд/Панель графіків. Побудування кола*
4. Задамо синій колір ліній: *Головне меню/Вигляд/Опції/Колір/Лінії.*
5. У вікні *Довідник* активуємо опцію *Формула – графік/Рівняння-графік.*
6. Зі списку доступних побудовань виберемо *Побудувати коло.*
7. Активуємо ПШМР : *Головне меню/Вигляд/Панель редактора.*

8. У полі редактора формул введемо ім'я кола та після нього в круглих дужках за допомогою ПШМР наберемо дане рівняння кола у вигляді як це вказано у шаблоні введення довідника:  $g(x^2 + y^2 = 4)$ .
9. Натиснемо кнопку *Виконати* напроти команди *Побудувати коло*. У вікні відображення графіків з'явиться зображення кола, а в полі побудувань - ім'я.
10. Очистимо поле редактора формул: *Поле побудувань/Очистити Побудування сімейства парабол*
11. Змінимо колір ліній на червоний : *Головне меню/Вигляд/Опції/Колір/Лінії*.
12. Зі списку доступних побудувань виберемо *Побудувати графік функції  $f(y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$* .
13. При  $a = 2$  у полі редактора формул введемо :  $l(y = x^2)$
14. Натиснемо кнопку *Виконати* в шаблоні побудувань  $f(y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$ . У вікні відображення графіків з'явиться зображення параболи, а в полі побудувань - ім'я.
15. Очистимо поле Редактора формул: *Поле побудувань/Очистити*
16. Побудуємо графіки ще двох парабол, аналогічно виконуючі кроки 13-15 при  $a = -2$  та  $a = 5$ :  $p(y = x^2)$ ,  $f(y = x^2)$

На рисунку 3 продемонстровано кінцевий результат виконаних нами кроків та проаналізувавши який не важко зробити висновок, що дана система рівнянь буде мати один розв'язок тільки коли параметр  $a = -2$ .

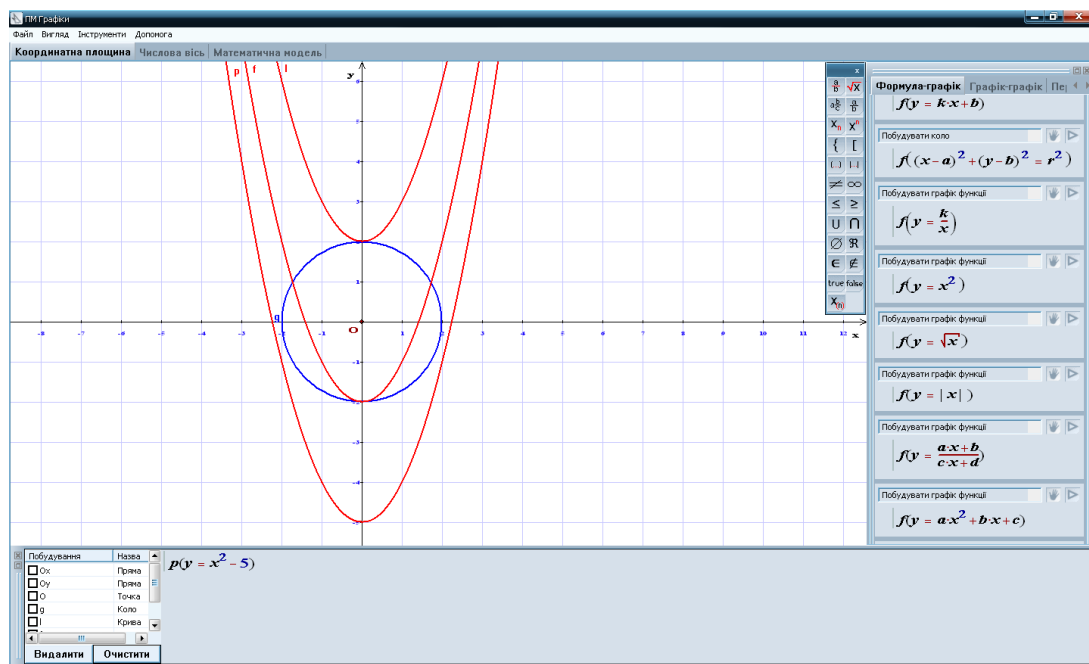


Рис. 3. Вікно ПМ Графіка у режимі Побудування

Кількість побудованих графіків функцій або рівнянь залежить від методичних аспектів розв'язання будь-якої задачі на уроці. В цьому режимі ви маєте можливість вилучати непотрібні побудування, виділивши в полі побудувань ім'я потрібної функції та натиснувши кнопку *Видалити* в цьому ж полі, або додавати побудування по описаному вище алгоритму.

**Режим Демонстрації.** Цей режим надає можливість переглянути окремо виконання графічних побудов в будь якій послідовності (рис.3). Перейти до нього можна, виконавши наступні дії: *Головне меню/Вигляд/Демонстрація*

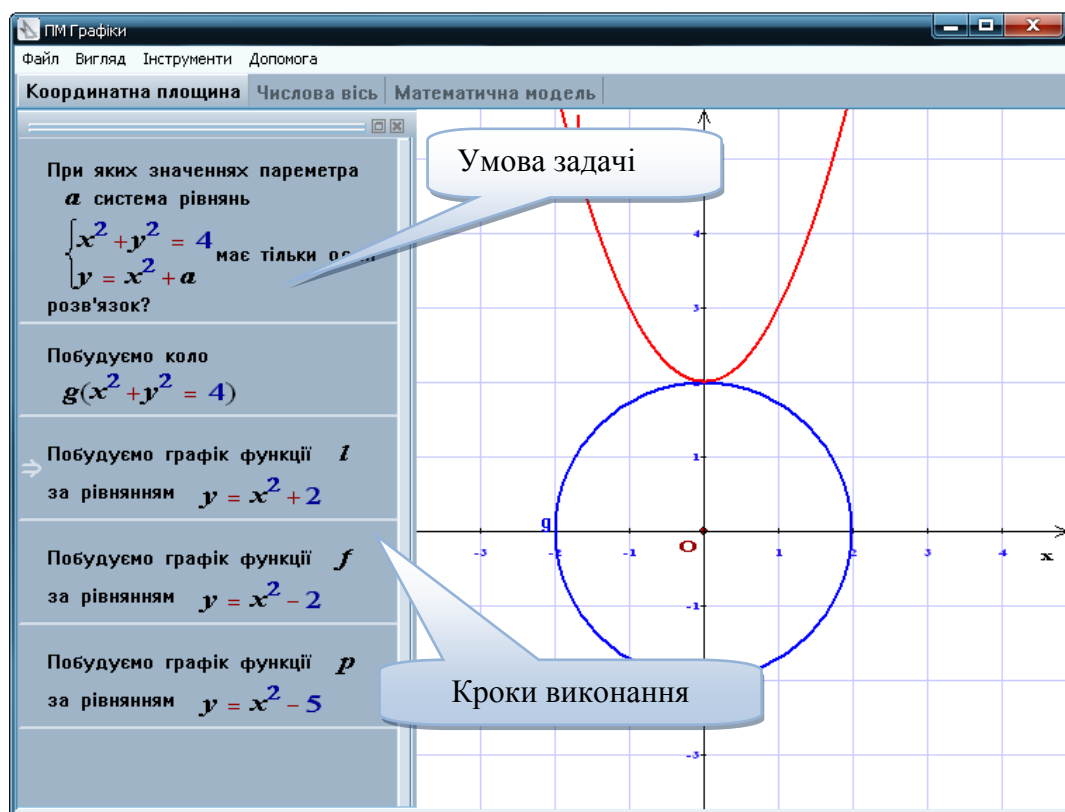


Рис. 3. Вікно ПМ Графіка у режимі Демонстрація . Задача 1.

Завершене побудування можна зберегти у «Бібліотеці графічних побудовань» (БГП), що надає можливість в подальшому зекономити час при підготовці до інших уроків або використовувати при організації самостійної роботи учнів. За допомогою команди *Відкрити з бібліотеки* графічну задачу можна відкрити для редагування або для демонстрації (рис.4). В поєднанні з інтерактивною дошкою або мультимедійним проектором цей режим надає учителю можливість викладати новий матеріал, супроводжуючи його статистичним і динамічним візуальним рядом, проводити комбіновані уроки та використовуючи інші модулі БН "Алгебра 7-9"[6;10].

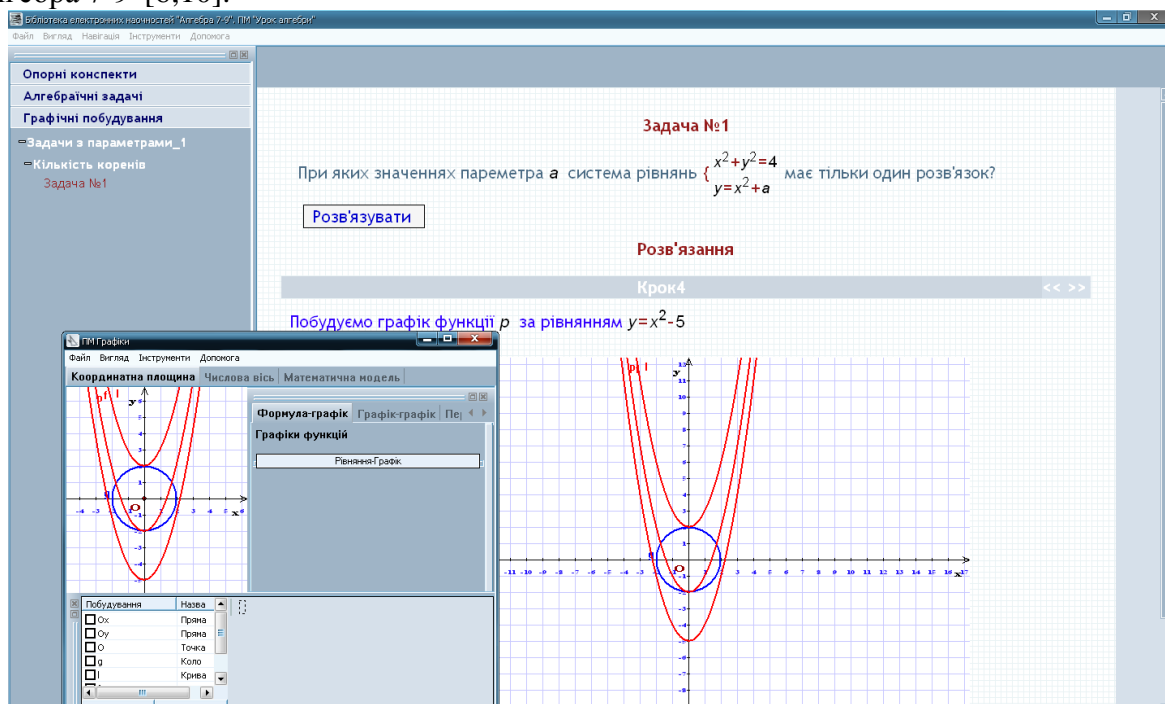


Рис. 4. Хід розв'язання графічної задачі у ПМ «Графіки» та БГП.

**Задача 2.** Скільки спільних точок мають графіки функцій  $y = |x^2 - 6 \cdot |x| + 8|$  та  $y = a$  в залежності від значення параметра  $a$  [11]?

### Розв'язання.

Після запуску ПМ **Графіки** виконаємо наступні дії.

1. Введемо умову задачі: *Головне меню/Нова задача*
2. Змінимо масштаб координатної площини: *Головне меню/Вигляд/Панель графіків*.  
**Побудова графіка функції  $y = x^2 - 6 \cdot x + 8$ .**
3. Задамо сірий колір : *Головне меню/Вигляд/Опції/Колір/Лінії*.
4. Задамо товщину ліній – 1од. вимір: *Головне меню/Вигляд/Опції/Товщина ліній*.
5. У вікні *Довідник* активуємо опцію *Формула - графік*.
6. Зі списку доступних побудовань виберемо *Побудувати графік функції  $f(y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$*
7. Активуємо ПШМР: *Головне меню/Вигляд/Панель редактора*.
8. У полі редактора формул введемо :  $f(y = x^2 - 6 \cdot x + 8)$ .
9. Натиснемо кнопку *Виконати* в шаблоні побудовань  $f(y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$ .  
**Побудова графіка функції  $y = x^2 - 6 \cdot |x| + 8$ .**
10. Виділимо ім'я  $f$  в полі побудовань.
11. У вікні *Довідник* активуємо опцію *Перетворення/Симетричне відображення пів площин відносно осей* (рис.5)
12. Очистимо поле *Редактора формул*: *Поле побудовань/Очистити*
13. У полі редактора формул введемо:  $g(|x|)$
14. Натиснемо кнопку виконати напроти команди *Симетричне відображення правої півплощини*.

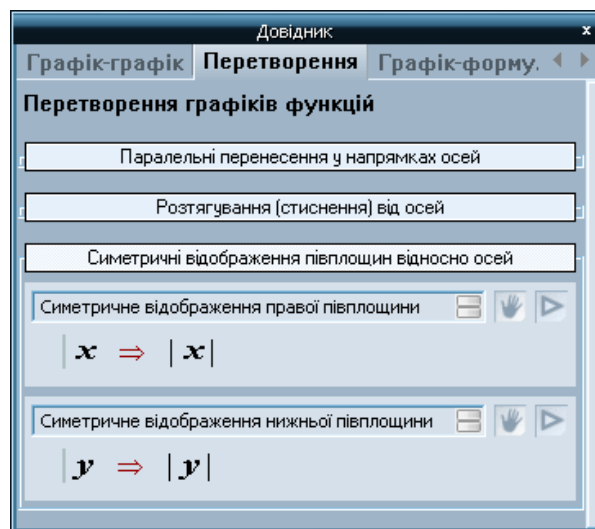


Рис.5. Вікно *Перетворення графіків функцій*.

### **Побудова графіка функції $y = |x^2 - 6 \cdot |x| + 8|$ .**

15. Очистимо поле *Редактора формул*: *Поле побудовань/Очистити*.
16. Задамо темно синій колір : *Головне меню/Вигляд/Опції/Колір/Лінії*.
17. Задамо товщину ліній – 3 од. вимір: *Головне меню/Вигляд/Опції/Товщина ліній*.
18. Виділимо ім'я  $g$  в полі побудовань.
19. У полі редактора формул введемо :  $I(|y|)$ .
20. Натиснемо кнопку виконати напроти команди *Відображення нижньої півплощини*.
21. Очистимо поле *Редактора формул*: *Поле побудовань/Очистити*.
22. Задамо червоний колір : *Головне меню/Вигляд/Опції/Колір/Лінії*.

23. Задамо товщину ліній – 2 од. вимір: *Головне меню/Вигляд/Опції/Товщина ліній.*
24. У вікні *Довідник* активуємо опцію *Формула - графік.*
25. Зі списку доступних побудовань виберемо *Побудувати графік функції  $f(y = k \cdot x + b)$ .*
26. Послідовно побудуємо множину графіків лінійної функції  $y = a$ , коли  $a \in \{-1; 0; 0,5; 1; 3; 8; 9\}$ .
27. Виконаємо перехід в режим *Демонстрації: Головне меню/Вигляд/Демонстрація.*

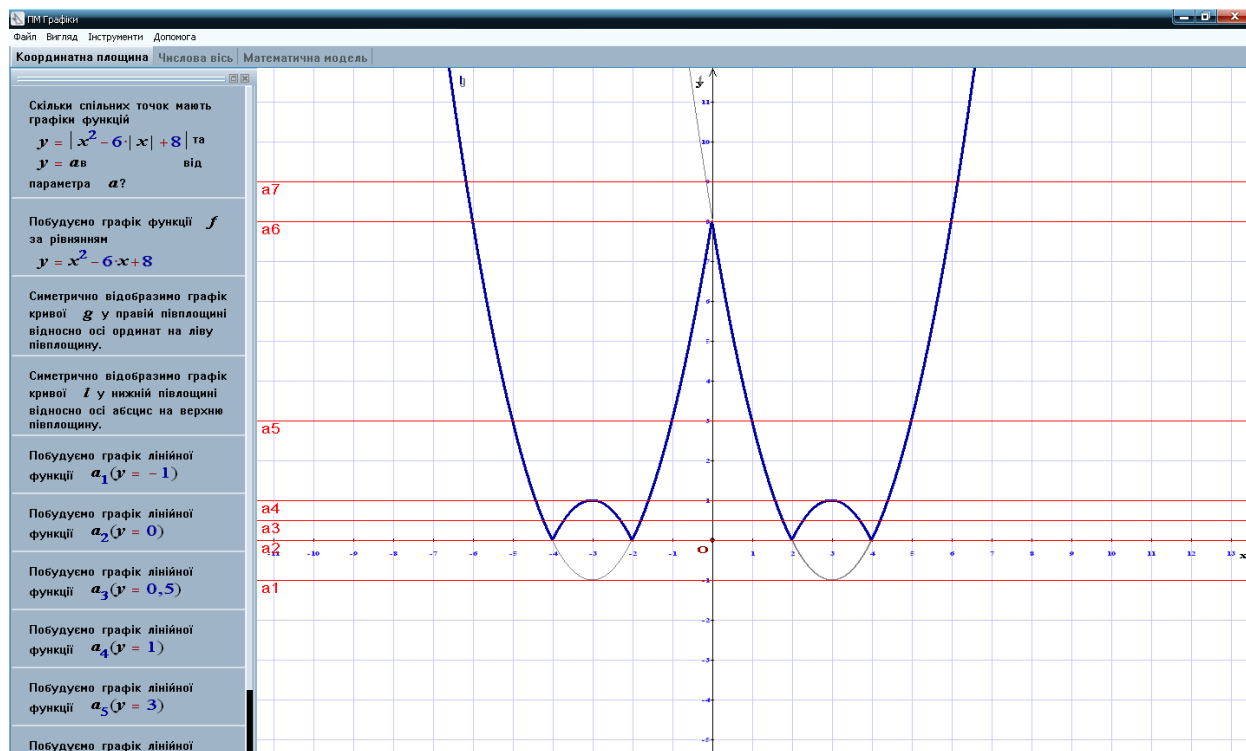


Рис.6. Вікно ПМ Графіка у режимі Демонстрація . Задача 2.

28. Аналізуючи отриману графічну побудову, робимо висновки про кількість спільних точок графіків функцій  $y = |x^2 - 6 \cdot |x| + 8|$  та  $y = a$  в залежності від параметра  $a$  :
  - якщо  $a \in (-\infty; 0)$  – спільних точок не існує;
  - якщо  $a \in (8; +\infty)$  - спільних точок 2;
  - якщо  $a = 8$  спільних точок 3;
  - якщо  $a \in \{0\} \cup (2; 8)$  - спільних точок 4;
  - якщо  $a = 1$  спільних точок 6;
  - якщо  $a \in (0; 1)$  спільних точок 8.

ПМ **Графіки** формує алгоритмічний стиль мислення при розв'язуванні задач на графічні побудови. Аналізуючи задачі з параметром, які можна розв'язувати графічним способом, учитель має знайти алгоритм її розв'язування за допомогою команд довідника та сформулювати цей алгоритм у вигляді послідовності команд. Учитель може заздалегідь підготувати шаблони алгоритмів розв'язку задач, де в залежності від рівня підготовки учнів деталізувати кроки виконання завдання та використовувати при організації самостійної роботи учнів(табл.1).

Табл. 1 – Картка – завдання для самостійної роботи.

<b>Задача 3.</b> Знайти при яких значеннях параметра $a$ рівняння
---

$(x^2 + 2 \cdot x + a - 2) \cdot (x^2 - 2 \cdot x - a) = 0$ має рівно три корені?			
№	Алгоритм (кроки) виконання розв'язання.		
1	Зводимо дане рівняння до сукупності рівнянь: $\begin{cases} a + 4x - x^2 - 1 = 0, \\ a + 1 -  x - 2  = 0. \end{cases}$		
2	Виражаємо параметр $a$ через змінну $x$ : $\begin{cases} a = x^2 - 4x + 1, \\ a =  x - 2  - 1. \end{cases}$		
3.	а) Використовуючи <i>Формулу-графік</i> $f(y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$ , будуємо графік функції $y = x^2 - 4 \cdot x + 1$	б) Використовуючи <i>Формулу-графік</i> $f(y = a \cdot  b \cdot x + c  + d)$ , будуємо графік функції $y =  x - 2  - 1$ .	с) Використовуючи <i>Формулу-графік</i> $f(y = k \cdot x + b)$ , будуємо декілька прямих $y = a, a \in \{-4; -1; 1; 3\}$ .
4	При яких значеннях параметра $a$ графік функції $y = a$ перетинає отримане графічне об'єднання у трьох точках?		
5	Відповідь: $a = -1$ .		

### Висновки

Використання ППЗ “Бібліотека електронних наочностей “Алгебра 7-9”, зокрема ПМ **Графіки**, при розв'язанні задач з параметрами типу графічним методом дозволяє унаочнити динамічні математичні об'єкти та більш ґрунтовно розібрати алгоритм їх розв'язання. Це надає змогу учителю удосконалити навчальний процес при викладанні даної теми, що в свою чергу сприяє розвитку в учнів глибокого стійкого інтересу до дослідження, високої логічної культури, доброї техніки дослідження, вміння поєднувати в єдине ціле знання з кількох розділів математики.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Репета В.К. Задачі з параметрами: навчальний посібник/ В.К. Репета, Н.О. Клешня, М.В. Коробова, Л.А. Репета.-Л.:Вища школа., 2006.-302с.:ін.
2. Горнштейн П.І. Задачі з параметрами/ П.І. Горнштейн П.І., В.Б Полянський, М.С. Якір. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004, - 256с.
3. Присяжнюк А.В. Програмний засіб навчального призначення «Динамічний графічний калькулятор»/ А.В. Присяжнюк // Комп'ютер у школі та сім'ї. - 2007. - № 5- С. 39-41.
4. Раков С.А. Навчальні дослідження в курсі геометрії за темою «Геометричні перетворення» з використанням пакета динамічної геометрії DG / С.А. Раков, В.П.Горох, К.О. Осенков // Комп'ютер у школі та сім'ї.-2004.- №7.- С.3-7.



5. Кушнір В.А. Технологія дослідження функцій засобами комп'ютерного моделювання / Кушнір В.А. , Річняк Р.Я // Комп'ютер у школі та сім'ї.-2009.-№6-С.12-17.
6. Програмний засіб "Бібліотека електронних наочностей "Алгебра 7-9", версія 1.5. Методичні рекомендації вчителям. За редакцією М.С.Львова, В.А.Крекніна. – Випуск 1. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2006. – 59 с.
7. Програмний засіб "Бібліотека електронних наочностей "Алгебра 7-9", версія 1.5. Настанова користувача. Версія 1 / За редакцією М.С.Львова, В.А.Крекніна. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2006. – 69 с.
8. Львов М.С. /Львов М.С.// Математична газета- 2007.-№11-12.-С.14-19.
9. Львова Н.М. Графічний метод розв'язування алгебраїчних задач та його реалізація у програмному засобі "Бібліотека електронних наочностей Алгебра 7-9 " / Н.М. Львова //Інформаційні технології в освіті: зб. наук. праць. Випуск 1. – Херсон: Видавництво ХДУ.- 2008.-190 с.
10. Основные аналитические методы решения задач с параметрами [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://sc.nios.ru/catalog/rubr/df413b15-266b-4a0a-bdb2-28fc41140ab2/111905/>
11. Ясінський В.В. Математика: навч. посібн. для слухачів ФДП НТУУ «КПІ»/ За редакцією чл.-кор. НАН України В.С. Мельника.- К.: НТУУ «КПІ», 2005.- 372 с.- ( Серія «На допомогу абітурієнту»)
12. Львов М. Алгебра з комп'ютером /М. Львов, Н. Львова.- К.: Шк. світ, 2007. – 128 с. (Бібліотека «Шкільного світу»).

*Рецензент: Співаковський О.В.*