УДК 519.876.5.330

ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССА ИНВЕСТИРОВАНИЯ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Вейцблит А.И.
Херсонский государственный университет

В статье представлены экономико–математические основы и структура программы, исследующей инвестиционный процесс методами математического программирования.

Ключевые слова: *исследование, программирование, оптимизация, инвестирование, риск, диверсификация.*

Обучение экономике требует ощущения самостоятельного участия в её процессах. В тех её разделах, где реальность достаточно глубоко описывается математическими моделями, это может достигаться путём создания информационных моделей. В особенности это касается инвестиционного процесса, который сам является, прежде всего, исследованием. В этом случае модельная программа служит аналогом установки для проведения физического эксперимента. В статье описываются экономико–математические основы и алгоритмы программы, позволяющей исследовать процесс оценки проектов методами математического программирования. Такая программа может представлять интерес не только при обучении, но и для финансовых аналитиков и фондовых брокеров.

В настоящее время задача инвестирования фактически эквивалентна задаче поиска оптимального портфеля инвестиций [1]. Портфель задаётся долями x_i содержащихся в нём N инвестиций r_i (i = 1,2,…,N, $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$). Суть портфельного подхода выражен в понятии диверсификация. Если портфель хорошо диверсифицирован, т.е. укомплектован так, что динамика его доходов определяется лишь общими тенденциями рынка, а не связанные с общими индивидуальные колебания в динамике составляющих его инвестиций взаимно нейтрализуются, то риск уменьшается и предсказуемость возрастает. Основные характеристики инвестиции r_i – средняя доходность $E(r_i)$ и риск, обычно измеряемый дисперсией σ_i^2 или стандартным отклонением σ_i денежного потока (т.е. временного ряда доходов от инвестиции) преобразуются в соответствующие характеристики портфеля. А именно, средняя доходность портфеля r_x $E(r_x) = \sum_{i=1}^{N} x_i E(r_i)$, его стандартное отклонение $\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}}$, где σ_{ij} – ковариация денежных потоков инвестиций r_i и r_j. (По определению, $\sigma_{ij} = \frac{1}{M}\cdot\sum_{t=1}^{M}[r_i(t)-E(r_i))\cdot(r_j(t)-E(r_j)]$, где $r_i(t)$, $r_j(t)$ – доходность инвестиции r_i и r_j в момент времени t соответственно, t = 1,2,…,M). В первоначальной модели рынка ценных бумаг Шарпа – Линтнера – Моссена [2], [3] задача поиска оптимального портфеля инвестиций сведена к следующей.

Задача 1. Найти такой портфель, т.е. такой набор x_i, при котором максимально

$$\theta_x = \frac{E(r_x)-E(r_1)}{\sigma_x} \qquad (\sum_{i=1}^{N} x_i = 1),$$

где $E(r_1)$ – это заданная средняя доходность безрискового актива (обычно олицетворяемая с доходностью краткосрочных казначейских облигаций).

Смысл этой оптимизационной задачи непосредственно ясен из рисунка.

Множество всех возможных портфелей выпукло и граница этого множества содержит отрезок прямой, называемой линией рынка капитала, между безрисковым активом r_1 и рыночным портфелем М – единственным портфелем на этом отрезке, не содержащем безрисковых инвестиций. Именно в этом портфеле М угловой коэффициент θ, очевидно и принимает максимально возможное значение. По своему экономическому смыслу величина θ – это цена, которую платят инвестору за измеряемую стандартным отклонением единицу риска, на который он пошёл. Для оптимального рыночного портфеля М эта цена достигает максимального возможного значения.

В соответствии с результатами, Фишера Блэка (Fisher Black) [4], задача 1 линеаризуется и расчеты оптимального портфеля легко осуществить. Однако, в большинстве случаев решение задачи 1 приводит к некоторым отрицательным весовым коэффициентам x_i [1]. Случай $x_i < 0$ возможен в действительности [5], [6] и соответствует следующим двум допущениям: 1) актив r_i продан инвестором авансом (без покрытия), т.е. еще до его фактического наличия на руках; 2) денежные поступления от этой продажи немедленно оказываются в распоряжении инвестора. Однако, в действительности редко бывает так, чтобы вырученные от продажи авансом средства сразу же поступили в распоряжение инвестора, поскольку брокерские фирмы обычно практикуют частичное или даже полное депонирование этих средств. Бывает и так, что полностью запрещено продавать активы без покрытия; многие инвесторы сразу действуют, исходя из предположения о невозможности продажи без покрытия. В результате получаем дополнительное условие $x_i \geq 0$ и уже существенно нелинейную задачу максимизации при запрете на продажу без покрытия.

Задача 2. Найти такой портфель, т.е. набор x_i, при котором максимально

$$\theta = \frac{E(r_x) - E(r_1)}{\sigma_x},\ x_i \geq 0,\ (\sum_{i=1}^{N} x_i = 1),$$

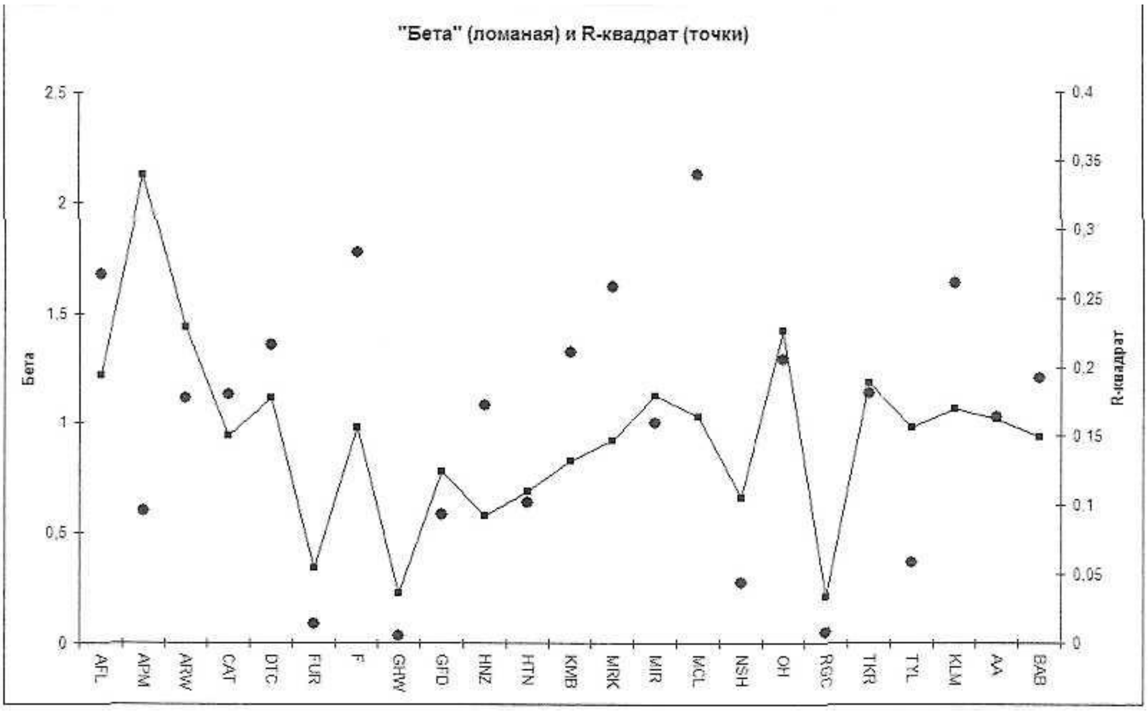
$E(r_1)$ – заданная доходность безрискового актива.

Заметим, что задачи максимизации 1 и 2 могут решаться для произвольного набора N активов (инвестиций), поэтому ни из чего не следует, что полученный в них оптимальный портфель действительно диверсифицирован, т.е. что его динамика отражает динамику всего рынка. Поэтому следующее линейное условие следует ввести, как дополнительное условие ограничения в задачи максимизации 1 и 2.

Условие диверсификации. Пусть R(t) – доход всего рынка, r(t) – доход безрискового актива, а $r_x(t)$ – доход некоторого портфеля в момент времени t. Тогда портфель r_x вполне диверсифицирован, если для некоторого числа β с допустимой погрешностью $r_x(t) – r(t) = = β(R(t) – r(t))$ при всех t.

Здесь β – угловой коэффициент линейной корреляции доходов портфеля $r_x(t)$ по доходам рынка R(t); дисперсия ортогональной проекции $r_x(t)$ на R(t) – это по экономическому своему смыслу “недиверсифицируемый риск”, т.е. такая компонента риска, которая не поддаётся диверсификации, определяется лишь общими тенденциями рынка. Поэтому погрешность в условии диверсификации естественно измерять, вычитая из единицы отношение дисперсии “недиверсифицируемого риска” ко всей дисперсии портфеля r_x; это отношение обычно называют коэффициентом детерминации и обозначают R^2 [7].

Для иллюстрации рассмотрим следующий график, на котором показаны величины β для 23 акций. Как видно, значение R^2 для отдельных регрессий невысоко (самое высокое из них составляет 35%, а самое низкое близко к нулю). Среднее R^2 по 23 акциям равно 16,05%, а среднее β составляет 0,944.



Объединяя 23 акции в равномерно взвешенный портфель, получаем β для портфеля, равный 0,944, что равно среднему показателю его отдельных составляющих. Однако величина R^2 для портфеля равна 61,44%, что значительно превышает среднюю R^2 по всем бумагам. Для большого, хорошо диверсифицированного портфеля его показатель R^2 приближается к единице.

Помимо условия диверсификации необходимы некоторые **условия устойчивости**, позволяющие данные о динамике за последние годы экстраполировать на будущее, прежде всего гарантии того, что фирма не обанкротится. В широко используемых реально оптимальных портфелях, так называемых индексных, используются различные условия устойчивости и способы их обеспечения.

Так индекс S&P 500 фирмы Standard & Poor's [5], [6] включает 500 компаний – лидеров ведущих отраслей американской экономики и пользуется широким признанием по всему миру как лучший индикатор состояния фондового рынка США. Индекс ориентирован на сегмент рынка с высокой капитализацией и охватывает более 80% акций американских компаний, что делает его инструментом, характеризующим состояние рынка в целом, условие диверсификации для портфеля S&P 500 выполнено. Поддержанием S&P 500 занимается Индексный комитет, состоящий из экономистов и индексных аналитиков Standard & Poor's, который проводит регулярные заседания. Индексный комитет руководствуется комплексом опубликованных руководящих принципов. Подробное описание, в том числе критерии включения компаний в список для расчета индекса и причины исключения из него, материалы исследований публикуются на сайте www. standardandpoors. com в разделе "Концептуальные основы работы Индексного комитета". Критерии включения компаний в список для расчета индекса включают стандарты бухгалтерского учета, рыночную капитализацию (свыше 4 млрд. долл.), финансовую устойчивость, адекватную ликвидность и обоснованные цены, секторальную репрезентативность и так далее. Уже само это разнообразие свидетельствует об отсутствии вполне надёжного критерия устойчивости. В результате сама восходящая к Фишеру Блэку и его предшественникам модель рынка капитала поставлена под сомнение, его тестированию посвящена обширная литература [8]. Поиск “истинно рыночного” или “истинно оптимального” портфеля ведётся в значительной степени не научными, а корпоративными методами.

Между тем линеаризация задачи поиска оптимального портфеля возможна и в самом общем случае. Существенно то, что все условия устойчивости подобно условиям диверсификации могут быть [9] стандартными приёмами целочисленного линейного программирования выражены, как линейные условия ограничений. Если известна динамика рынка R(t), то для каждой инвестиции r_i известна ортогональная проекция динамики её доходов на R(t), известно стандартное отклонение σ_i этой проекции, т.е. “недиверсифицируемый риск” и, наконец, известно отношение $\theta_i = \dfrac{E(r_i) - E(r_1)}{\sigma_i}$, где $E(r_i)$ – средняя доходность инвестиции r_i, $E(r_1)$ – заданная доходность безрискового актива. Как показано выше, величина θ_i – это цена, которую платят инвестору за измеряемую стандартным отклонением единицу риска, на который он пошёл, выбрав инвестицию r_i; чем выше цена, тем приемлемее эта инвестиция. Поэтому портфель с долями x_i содержащихся в нём N инвестиций r_i (i = 1,2,…,N, $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$) оптимален, если величина $z = \sum_{i=1}^{N} \theta_i x_i$ принимает наибольшее возможное значение.

При равновесии на фондовом рынке для хорошей инвестиции величина θ_i должна быть приближённо равна равновесной цене.

Условие равновесия. Для всех инвестиций r_i, входящих в оптимальный портфель, величины θ_i совпадают и равны оптимальной θ_x из задачи 1.

Однако, такое равновесие на фондовом рынке нереально уже потому, что величины θ_i зависят от экстраполяции в будущее, которое все видят по-своему.

Задача 3. Взяв величину $z = \sum_{i=1}^{N} \theta_i x_i$ в качестве целевой функции, а линейные условия диверсификации и устойчивости в качестве условий системы ограничений, получаем формулировку задачи поиска оптимального портфеля, как задачу линейного программирования.

Утверждение 1. При выполнении одинаковых условий диверсификации и устойчивости оптимальные портфели задач 2 и 3 совпадают.

Утверждение 2. При выполнении дополнительно условия равновесия оптимальные портфели задач 1 и 3 совпадают. Обратно, из совпадения оптимальных решений задач 1 и 3 следует, что выполнено условие равновесия.

Вывод: задача 3 является линеаризацией задачи 2 и эквивалентна задаче 1, если выполнено условие равновесия. Это позволяет использовать в задаче оптимизации портфеля стандартные приёмы симплекс – метода и принципиально изменить подход к её решению. А именно, вместо предварительного отбора компаний Индексным комитетом и лишь затем оптимизации отобранного списка естественно поместить соответствующие условия устойчивости в систему ограничений задачи линейного программирования, лишь в особых нестандартных случаях прибегая к кропотливому исследованию. Это позволяет:

1) корректировать портфель в режиме реального времени; 2) оценивать устойчивость оптимального портфеля стандартными средствами симплекс – метода и эконометрики и прогнозировать возможные катастрофы (бифуркации) на рынке и время их прихода; 3) для данного рынка исследовать зависимость оптимального портфеля от используемых условий устойчивости для оптимизации самих этих условий.

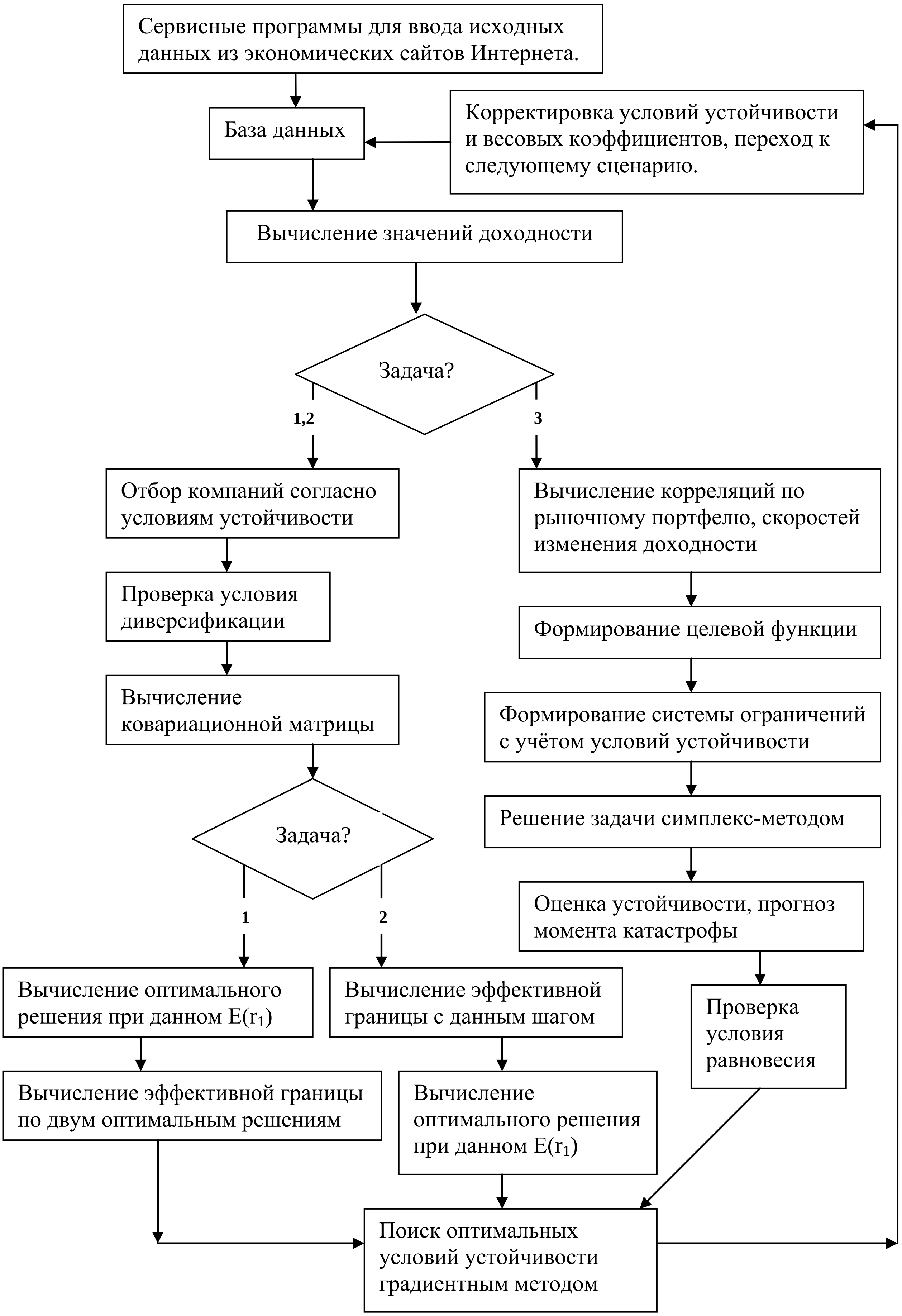
Именно это исследование пункта 3) и является главной целью рассматриваемой в этой статье программы. Поиск оптимального портфеля для данного рынка становится вновь научной проблемой и предметом научных исследований.

Далее приведены краткая блок – схема программы и комментарии к её компонентам.

1. Все основные данные, используемые в этой программе, берутся из Интернета. Так как Интернет отличается чрезвычайной динамичностью и изменчивостью, то сервисные программы для ввода исходных данных из его экономических сайтов в базу данных программы целесообразно не включать в саму программу, быстро адаптируя их по мере необходимости.

2. База данных содержит, во-первых, данные о курсах акций компаний, представленных на исследуемом рынке, во-вторых, используемые в программе условия устойчивости и в-третьих, оценки или баллы, присваиваемые этим условиям и влияющие на весовой коэффициент компоненты компании в целевой функции.

Для оценки устойчивости компании в программе используются традиционные показатели финансового анализа, обычно указанные в финансовых отчётах либо легко извлекаемые из них. Как правило, инвесторы используют эти показатели и соотношения для оценки деятельности компании и динамики её развития. Если финансовые показатели компании вызывают сомнение, то это, как правило, приводит к большим затратам на инвестирование в фирму, т.е. к росту стоимости её долга и соответственно к снижению её капитализации. Эти показатели всегда находятся в поле зрения экспертов по вопросам надёжности инвестиций и менеджмента компании. Поэтому в абсолютном большинстве случаев в своей совокупности они являются важной основой для оценки финансовой устойчивости компании. Все они делятся на четыре группы [10]: 1) коэффициенты и показатели ликвидности (текущий коэффициент, коэффициент “кислотного теста” и т.д.); 2) коэффициенты активности (оборотность товарно–материальных запасов, средние периоды погашения задолженности и т.д.); 3) коэффициенты задолженности (отношения долгосрочной задолженности к собственному капиталу, активам; коэффициент кратности процентов и т.д.); 4) коэффициенты прибыли и дохода (коэффициенты валовой, чистой и операционной прибыли, коэффициенты окупаемости инвестиций и собственного капитала и т.д.). Конечно, эти показатели дают лишь частично надёжную информацию: они зависят от методики и стандартов бухгалтерского отчёта, они вообще не учитывают риски, их использование нуждается в сравнении с показателями других фирм. Например, важным дополнительным показателем является публичность, т.е. процент акций, находящийся в публичном обращении. Для обеспечения диверсификации портфеля важно обеспечить секторальную репрезентативность, т.е. его соответствие реальной структуре экономики.


Сервисные программы для ввода исходных данных из экономических сайтов Интернета.
База данных
Корректировка условий устойчивости и весовых коэффициентов, переход к следующему сценарию.
Вычисление значений доходности
Задача?
1,2
3
Отбор компаний согласно условиям устойчивости
Вычисление корреляций по рыночному портфелю, скоростей изменения доходности
Проверка условия диверсификации
Формирование целевой функции
Вычисление ковариационной матрицы
Формирование системы ограничений с учётом условий устойчивости
Решение задачи симплекс-методом
Задача?
Оценка устойчивости, прогноз момента катастрофы
1
2
Вычисление оптимального решения при данном $E(r_1)$
Вычисление эффективной границы с данным шагом
Проверка условия равновесия
Вычисление эффективной границы по двум оптимальным решениям
Вычисление оптимального решения при данном $E(r_1)$
Поиск оптимальных условий устойчивости градиентным методом

На следующем рисунке приведена разбивка по секторам индекса S&P 500.

3. Вычисление значений доходности. Месячный доход по каждой акции – это процент прибыли, которую получил бы инвестор, купивший акцию в конце некоторого месяца t–1 и продавший ее в конце следующего месяца. Для месяца t и акции A месячный доход r_{At} определяется в программе следующим выражением

$$r_{At} = \ln\left(\frac{P_{At}}{P_{A,t-1}}\right).$$

Здесь, как это принято у финансовых аналитиков, вычислялся непрерывный сложный доход на акцию, т.е. предполагается, что $P_t = P_{t-1}e^{r_t}$, где r_t – доход в процентах за период (t – 1,t). В тех случаях, когда в месяце t выплачивается дивиденд Div_t, доход вычисляется по формуле $r_{At} = \ln\left(\frac{P_{At} + Div_t}{P_{A,t-1}}\right)$.

4. Вычисление корреляций исследуемых инвестиций по рыночному портфелю и скоростей изменения доходности производится стандартными эконометрическими программными средствами из пакета “Анализ данных” Excel на основе метода наименьших квадратов. При формировании целевой функции к доходности инвестиции прибавляется скорость её изменения с текущим (заданным при последней корректировке) весовым коэффициентом.

5. Для вычисления ковариационной матрицы в программе используется прямой метод с матрицей избыточной доходности. Пусть заданы N подверженных риску активов и для каждого актива известны данные о доходности rij за M периодов (i = 1,…,N j = 1,…,M). Тогда матрица избыточной доходности будет выглядеть следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} r_{11} - \overline{r_1} \ldots r_{N1} - \overline{r_N} \\ r_{12} - \overline{r_1} \ldots r_{N2} - \overline{r_N} \\ \\ r_{1M} - \overline{r_1} \ldots r_{NM} - \overline{r_N} \end{bmatrix}.$$

Транспонированная матрица будет равна

$$A^T = \begin{bmatrix} r_{11} - \bar{r}_1 & \ldots & r_{1M} - \bar{r}_1 \\ r_{N1} - \bar{r}_N & \ldots & r_{NM} - \bar{r}_N \end{bmatrix}.$$

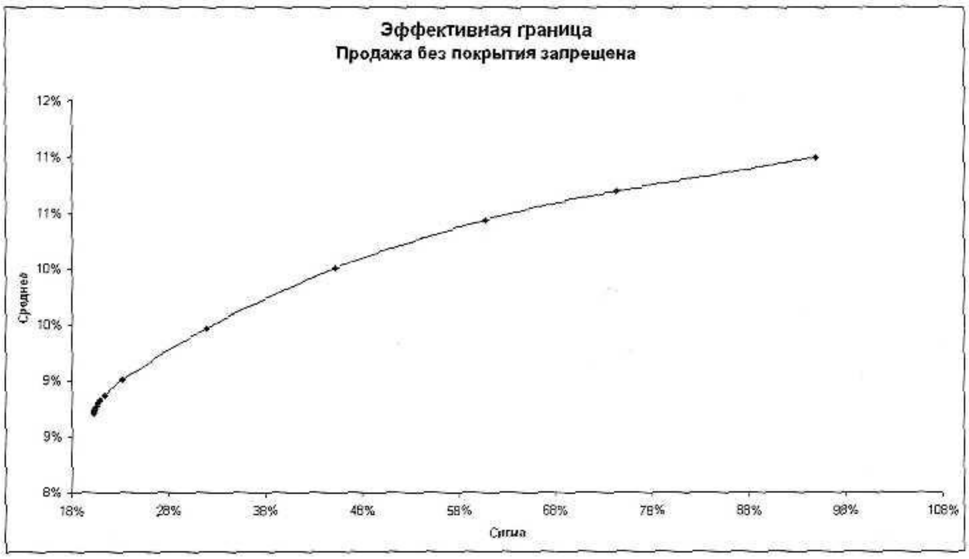
Умножив AT на A и разделив на количество периодов M, получим ковариационную матрицу: $S = [\sigma_{ij}] = \dfrac{A^T \cdot A}{M}$.

6. Расчеты оптимального портфеля в задаче 1 проводятся в соответствии с результатами Фишера Блэка [4]. А именно пусть c – некоторая константа, R – вектор средних доходов, а обозначение R – c относится к следующему вектору-столбцу: $R - c = \begin{bmatrix} E(r_1) - c \\ E(r_2) - c \\ \ldots \\ E(r_N) - c \end{bmatrix}$.

Тогда портфель X находится на огибающей выпуклого множества всех допустимых портфелей тогда и только тогда, когда он является нормированным решением системы $R - c = Sz$, $x_i = \dfrac{z_i}{\sum_h z_h}$. Иными словами пусть вектор z является решением системы линейных уравнений R – c = Sz. Тогда из этого решения можно получить портфель x на огибающей множества всех допустимых портфелей: $z = S^{-1}\{R - c\}$, $x_i = \dfrac{z_i}{\sum_{j=1}^{N} z_j}$.

Вычисление эффективной границы основано на том, что (Фишер Блэка [4]) выпуклая линейная комбинация любых двух портфелей на огибающей множества всех допустимых портфелей также принадлежит этой огибающей.

7. Задача 2 (задача при запрете на продажу без покрытия) решается с помощью надстройки “Поиск решения”. При заданном шаге h решается оптимизационная задача: найти такой портфель x, для которого достигает максимума $E(r_x)$ при условии, что $\sigma_x \leq nh$, где n = 1.2… .



Затем для заданной безрисковой ставки c находим оптимальный портфель на вычисленной эффективной границе, как точку пересечения с касательной, проходящей через точку (0; c).

8. В конечном счёте, полученные данные служат для того, чтобы для данного конкретного исследуемого рынка найти такие значения оценок финансовых и весовых коэффициентов, при которых получаемые доходы рыночного портфеля (индекса)

максимальны. Шаги градиентного метода при поиске этого оптимума и составляют основной цикл программы. Предусматривается возможность коррекции оценок и в “ручном режиме”, что позволит проверять гипотезы и активизировать учебный процесс. В особых случаях, если доходность высока, а финансовые коэффициенты нестандартны, необходимо прибегнуть к отдельному кропотливому исследованию этой конкретной инвестиции, что, по-видимому, уместнее сделать за рамками этой программы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бенинга Ш. Финансовое моделирование с использованием EXCEL – М.: “Вильямс”, 2007. – 592с.
2. Sharpe W.F. (1964) “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of risk”, Journal of Finance, 19 (September), pp. 425 – 442.
3. Sharpe W.F. (1988) Investments. Englewood Cliffs, New York: Prentice Hall.
4. Black, F. (1972) “Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing”, Journal of Business, 45 (July), pp. 444 – 455.
5. Удовенко В.А. FOREX. – М.: “Вильямс”, 2008. – 384с.
6. Гох Л. Как реально работает фондовый рынок. М.: “Баланс Бизнес Букс”, 2006. – 367с.
7. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: “Инфра-М”,1997. – 402с.
8. Roll R. (1977) “A Critique of the Asset Pricing Theory’s Tests, Part 1:”, Journal of Financial Economics, 4 (March), pp. 129 – 176.
9. Хэмди А. Таха Введение в исследование операций. – М.: “Вильямс”, 2001. – 912с.
10. Хаертфельдер М., Лозовская Е.С., Хануш Е. Фундаментальный и технический анализ рынка ценных бумаг. – СПб.: “Питер”, 2004. – 478с.