УДК 372.851

НЕСТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ ПРИ ВИВЧЕННІ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ

Кузьмич В.І.
Херсонський державний університет

В роботі розглянуті дві нестандартні задачі, які можуть бути запропоновані студентам для самостійного розв'язування при вивченні ними основних властивостей функцій в курсі математичного аналізу. Ці задачі носять творчий характер і сприятимуть глибшому розумінню студентами таких понять, як монотонність та неперервність функції.

Ключові слова: збіжність, границя, функція, монотонність, неперервність.

При вивченні будь-якого математичного курсу головна увага, як правило, приділяється основним, базовим властивостям, теоремам, формулам, правилам. Знайомство з ними, їх засвоєння забирає значну частину часу, відведену студенту на самостійну роботу. Обсяг цього матеріалу, його складність іноді спонукає студента до механічного засвоєння без глибокого розуміння самої суті певної властивості. Якість отриманих ним знань при цьому залишається низькою, оскільки він не в змозі їх застосувати до розв'язування нестандартних задач, які потребують творчого використання цих знань. Ефективність при засвоєнні матеріалу значно підвищується, якщо студент розуміє про що йде мова, коли він повністю володіє основними властивостями, розуміє їх сутність, може моделювати ці властивості, оперувати ними та видозмінювати. Цьому можуть сприяти контр приклади, нестандартні задачі, які викладач пропонуватиме студентам для самостійного розв'язування. Часто така робота над матеріалом може перерости в дослідницьку, і дати матеріал для реферату чи курсової роботи.

Багато нестандартних задач творчого характеру з математичного аналізу міститься у класичному збірнику [1], але їх звичайно недостатньо для того щоб охопити всі розділи математичного аналізу та всі властивості. Тому важливе поступове накопичення та систематизація відповідних задач в процесі викладання курсу, їх апробація.

У курсі математичного аналізу, вивчення функції розпочинається зі знайомства з основними її властивостями, такими як обмеженість, монотонність, періодичність, неперервність. Зокрема, властивість монотонності функції на деякій множині дійсних чисел традиційно розглядається як властивість порядку слідування значень функції. Якщо для будь-яких двох чисел $x_1 < x_2$ із множини X завжди виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, то функцію $f(x)$ називають зростаючою на множині X, якщо ж виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, то її називають спадною. І зростаючі і спадні функції називають монотонними. Таке означення дається і в шкільному курсі математики і в курсі математичного аналізу [2, с.21], [3, с.56]. В подальшому воно стає потужним засобом дослідження функцій і широко застосовується при отриманні різноманітних результатів не лише в математичному аналізі.

На властивість монотонності можна поглянути і з іншого боку, як на співвідношення між довільними трьома числами множини, без використання нерівності. Для цього сформулюємо

Означення 1. Нехай маємо три різні точки (числа) a, b і c множини X. Будемо казати, що точка b лежить між точками a і c, якщо віддаль між точками a і c дорівнює сумі віддалей від точки a до точки b та від точки b до точки c.

Таке означення природне, і легко засвоюється при моделюванні його на числовій осі. Тепер дамо означення монотонності функції яке базується на означенні 1, і відмінне від наведеного вище класичного означення.

Означення 2. Якщо для будь-яких трьох різних точок x_1, x_2, x_3 *множини* X *, таких що точка* x_2 *лежить між точками* x_1 *і* x_3*, значення функції* $f(x_2)$ *лежить між значеннями* $f(x_1)$ *і* $f(x_3)$*, то функцію* $f(x)$ *будемо називати монотонною.*

Отже, монотонною на числовій множині ми будемо називати функцію, яка на цій множині зберігає відношення „між”. Це означення, як бачимо, не використовує нерівності, однак в ньому задіяні три різні точки, в той час як класичне означення використовує дві різні точки множини. З іншого боку, в означенні 2 поєднані поняття зростаючої і спадної функції. Як класичне означення монотонності, так і означення 2 мають свої переваги та недоліки, і викладач може їх використовувати в залежності від потреби. Встановити рівноправність цих двох означень бажано доручити студентам, це завданняноситиме творчий характер, створить проблемну ситуацію і дасть можливість їм глибше зрозуміти поняття монотонності функції, поглянути на цю властивість з іншого боку.

Припустимо, що функція $f(x)$ є зростаючою в класичному розумінні. Покажемо, що в такому випадку вона зберігає поняття „між”. Для цього візьмемо три довільні різні точки x_1, x_2, x_3 множини X . Одна з них лежить між двома іншими, це слідує із аксіом множини дійсних чисел.

Нехай, наприклад, точка x_2 лежить між точками x_1 і x_3. І при цьому точка x_1 лежить лівіше точки x_2, або, що те саме, $x_1 < x_2$. Тоді точка x_2 лежить лівіше точки x_3, або $x_2 < x_3$. Оскільки функція $f(x)$, за умовою, зростаюча, то $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$. В цьому випадку віддаль між точками $f(x_1)$ і $f(x_2)$ дорівнюватиме $f(x_2) - f(x_1)$, а між точками $f(x_2)$ і $f(x_3)$, відповідно, $f(x_3) - f(x_2)$. Сума цих віддалей буде:

$$(f(x_2) - f(x_1)) + (f(x_3) - f(x_2)) = f(x_3) - f(x_1).$$

Отже, за означенням 2, точка $f(x_2)$ лежить між точками $f(x_1)$ і $f(x_3)$. Випадок спадної функції розглядається аналогічно.

Тепер припустимо, що виконується означення 2. Покажемо, що в цьому випадку функція $f(x)$ буде або зростаючою, або спадною. Для цього візьмемо дві довільні різні точки x_1 і x_2, такі що $x_1 < x_2$. Крім того, візьмемо довільну точку x_3, таку що $x_2 < x_3$, тобто точка x_2 лежатиме між точками x_1 і x_3. Тоді, за означенням 2, точка $f(x_2)$ лежатиме між точками $f(x_1)$ і $f(x_3)$. Якщо точка $f(x_1)$ лежить лівіше точки $f(x_2)$, або, що те саме, $f(x_1) < f(x_2)$, то функція $f(x)$ є зростаючою, оскільки більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Якщо ж точка $f(x_1)$ лежить правіше точки $f(x_2)$, або, що те саме, $f(x_1) > f(x_2)$, то функція $f(x)$ є спадною. В обох випадках вона є монотонною в класичному розумінні.

З наведених вище міркувань слідує, що для встановлення властивості монотонності функції за означенням 2 множина X повинна містити не менше трьох різних точок, в той час як для класичного означення достатньо лише двох таких точок.

Звернемось тепер до властивості неперервності функції на проміжку. Нагадаємо, що функція називається неперервною на проміжку, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку, та має відповідну односторонню неперервність в його межових точках . Відомо, що існування границі функції в точці не забезпечує її неперервності в цій точці. З іншого боку, якщо припустити, що функція $f(x)$ має в кожній точці x_0 деякого проміжку границю

$\overline{f}(x_0)$, то це означає, що на цьому проміжку задана нова функція $\overline{f}(x)$, яка буде неперервною в кожній точці цього проміжку.

Цю задачу можна запропонувати студентам, як вправу на означення неперервності функції. Не дивлячись на простоту її формулювання, вона вже не така проста як попередня, і її розв'язання потребуватиме розуміння самої сутності властивостей границі та неперервності функції в точці. Причому, результат можна отримати використовуючи дві форми означення неперервності – за допомогою послідовностей та класичне (по Коші).

Доведемо це твердження методом від протилежного. Тобто, припустимо, що в деякій точці x_0, в якій функція $f(x)$ має границю $\overline{f}(x_0)$, функція $\overline{f}(x)$ не є неперервною. Це означає, що існує принаймні одна послідовність $\{\overline{x}_n\}$ точок проміжку, яка збігається до точки x_0, а послідовність $\{\overline{f}(\overline{x}_n)\}$ значень функції $\overline{f}(x)$ не збігається до числа $\overline{f}(x_0)$ [2, с. 67, 68], [3, с. 93]. Тобто, існує таке додатне число ε_0, що для всіх елементів деякої підпослідовності $\{\overline{x}_{n_k}\}$ виконуватиметься нерівність

$$\left|\overline{f}(\overline{x}_{n_k}) - \overline{f}(x_0)\right| > \varepsilon_0. \tag{1}$$

За умовою задачі, в кожній точці $\overline{x}_{n_k}$ функція $f(x)$ має границю, що дорівнює $\overline{f}(\overline{x}_{n_k})$. Тому для числа $\varepsilon_0/2$ існує проколений окіл цієї точки, в кожній точці x якого виконується нерівність

$$\left|f(x) - \overline{f}(\overline{x}_{n_k})\right| < \varepsilon_0/2. \tag{2}$$

Візьмемо із цього околу довільну точку x_k яка б задовольняла нерівність

$$\left|x_k - \overline{x}_{n_k}\right| < \frac{1}{k}. \tag{3}$$

Таким чином, ми побудуємо послідовність $\{x_k\}$ точок проміжку, яка при k прямуючому до нескінченості буде прямувати до точки x_0. Це слідує із нерівності (3) та збіжності підпослідовності $\{\overline{x}_{n_k}\}$ до точки x_0. Крім того, в кожній точці x_k, виконуватиметься нерівність (2), тобто

$$\left|f(x_k) - \overline{f}(\overline{x}_{n_k})\right| < \varepsilon_0/2. \tag{4}$$

З іншого боку, зі збіжності послідовності $\{x_k\}$ до точки x_0 слідує збіжність послідовності $\{f(x_{k)}\}$ значень функції $f(x)$ до числа $\overline{f}(x_0)$. Тобто, для числа $\varepsilon_0/2$ існуватиме такий номер $K(\varepsilon_0)$, починаючи з якого для всіх номерів k виконуватиметься нерівність

$$\left|f(x_k) - \overline{f}(x_0)\right| < \varepsilon_0/2. \tag{5}$$

Таким чином, із нерівностей (4) і (5) для всіх номерів k, починаючи з $K(\varepsilon_0)$, виконуватиметься нерівність

$$\left|\overline{f}(\overline{x}_{n_k}) - \overline{f}(x_0)\right| = \left|(\overline{f}(\overline{x}_{n_k}) - f(x_k)) + (f(x_k) - \overline{f}(x_0))\right| <$$

$$\left|f(x_k) - \overline{f}(\overline{x}_{n_k})\right| + \left|f(x_k) - \overline{f}(x_0)\right| < \varepsilon_0.$$

Але ця нерівність суперечить нерівності (1). Тому зроблене на початку припущення про відсутність неперервності функції $\overline{f}(x)$ в точці x_0 невірне. Оскільки точка x_0 була вибрана довільно, то це доводить неперервність функції $\overline{f}(x)$ в кожній точці проміжку.

Обидві наведені вище задачі використовують такий прийом, як пошук іншого погляду на певну властивість, відмінного від стандартного. Цей прийом допомагає в деталях проаналізувати властивість та вирізнити головні чинники, які забезпечують її виконання.

Наведені вище задачі можна використати як для самостійної роботи над відповідним матеріалом, так і для складання схожих за конструкцією задач, з метою їх подальшого використання в якості завдань для студентських олімпіад.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 251 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу, ч. 1. – К.: Вища школа, 1976. – 368 с.
3. Шкіль М.І. Математичний аналіз, ч. 1. – К.: Вища школа, 1978. – 383 с.

Рецензент: Співаковський О.В.