**УДК 004: 37**

**Кушнір В.А.**
**Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка, Кіровоград, Україна**

# *МОДЕЛЮВАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ MAPLE ЯК ЗАСІБ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ПОНЯТЬ І ПРОЦЕДУР ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ*

DOI: 10.14308/ite000583

*Стаття присвячена технології бінарного і «технології фундаментального навчання». Під бінарним навчанням розуміється одночасне навчання математики і інформатики, наприклад, диференціальних рівнянь і Maple, лінійної алгебри і Maple. Причому системного традиційного курсу Maple не проводиться. Використання можливостей Maple-технології при викладанні математики базується на таких фундаментальних поняттях інформатики як алгоритм, програма, лінійна програма, цикл, розгалуження, умовні оператори тощо. Тому розглядається тільки певна система команд-операторів Maple, котрі необхідні при вивченні фундаментальних понять лінійної алгебри та диференціальних рівнянь в Maple-середовищі. Умовна назва – «технологія фундаментального навчання» відображає дослідження фундаментальних математичних понять і відповідних процедур, котрі виражають властивості цих понять, в Maple-середовищі. У цій статті йдеться про дослідження складних фундаментальних понять лінійної алгебри (визначник матриці і алгоритм його обчислення, характеристичний многочлен матриці і власні значення матриці, канонічна форма характеристичної матриці, власні вектори матриці, елементарні дільники характеристичної матриці тощо), котрі розглядаються у відповідних курсах оглядово, а то і зовсім не розглядаються, хоча мають важливе значення у лінійних системах диференціальних рівнянь, асимптотичних методах розв'язування диференціальних рівнянь, системах лінійних алгебраїчних рівнянь. При цьому складні і об'ємні процедури відшукання наведених понять лінійної алгебри умонтовані у Maple і можуть виконуватися в результаті простої команди-оператора.*

*Особливо важлива проблема зведення матриці до канонічного вигляду. Адже функції від матриць фактично зводяться до функцій від діагональних матриць чи матриць у канонічній формі Жордано. Саме ці форми матриць використовуються при піднесенні квадратної матриці до степеня, добуванні кореня n-го степеня із квадратної матриці, обчислення експоненти від матриці і т.п. Автор створює чотири базові канонічні форми-моделі матриць і показує як конструювати матриці, котрі подібним перетворенням зводяться до цих чотирьох. Наводяться програми-процедури конструювання квадратних матриць на основі вибраних канонічних матрицях-моделях. Тоді можна створити достатню кількість варіантів квадратних матриць на основі канонічних матриць-моделей, що дозволяє застосовувати індивідуальні технології навчання.*

*Використання Maple-технології дозволяє автоматизувати громіздкі і складні процедури відшукання матриці перетворення, канонічної форми матриці, значень функцій від матриць тощо, що не тільки економить час, а і концентрує увагу і зусилля на розуміння наведених вище фундаментальних понять лінійної алгебри і процедур дослідження їх властивостей. Все це створює сприятливі умови використання фундаментальних понять лінійної алгебри в науковій і дослідницькій роботі студентів і магістрантів з використанням Maple-технології.*

***Ключові слова:*** *фундаментальні поняття лінійної алгебри, «фундаментальна технологія» навчання, бінарна технологія навчання, канонічна форма матриці, функції від матриць, Maple-середовище.*

У статті мова йдеться про нові можливості навчання в умовах інформатизації навчального процесу при професійній підготовці фахівців з вищою освітою. З цього приводу відомий український учений В.Ю. Биков зазначає, що проникнення ІКТ у навчальний процес створює передумови для кардинального оновлення як змістовно-цільових, так і технологічних сторін навчання, що виявляється у суттєвому збагаченні системи дидактичних прийомів, засобів навчання і на цій основі – у формуванні нетрадиційних педагогічних технологій, застосованих на використанні комп'ютерів [3, с. 141]. Саме до нетрадиційних технологій навчання у Maple-середовищі (з приводу Maple-середовища див.[1, 12]) можна віднести, зокрема, бінарні технології (В.А. Кушнір [8]); «технології фундаментального навчання» (С.У. Гончаренко [5], С.О. Семеріков [10], В.А. Кушнір [7]), коли досліджуються фундаментальні поняття (у нас лінійної алгебри) і відповідні процедури їх дослідження в Maple-середовищі, чому і присвячена стаття, тощо.

Фундаментальність освіти академік НАПН України С.У. Гончаренко [5] пов'язував з: інтенсивними, інтерактивними, інтегративними, проблемними, гуманістичними технологіями навчання; сучасним змістом освіти; компетентністю, творчістю, креативністю майбутніх фахівців; особистісними знаннями; гармонійним задоволенням пізнавальних інтересів студентів; осмисленням і розумінням суті речей; узагальненими та універсальними знаннями фахівців; інтелектуальним середовищем; науково-інформаційними базами; міждисциплінарним мисленням; динамізмом соціально-економічних процесів у суспільстві; загальною і методологічною культурою фахівців; убудованістю освіти в наукові дослідження; фундаментальною професійною підготовкою фахівців; «наскрізністю» знань і умінь; розвитком особистості фахівця загалом. Розгортання наведених С.У. Гончаренком методологічних положень про фундаментальність освіти, наповнення їх конкретним змістом в аспекті навчання математики й інформатики і присвячене наше дослідження.

***Постановка проблеми***. Серед фундаментальних понять і відповідних процедур і тверджень (теорем, способів, алгоритмів) лінійної алгебри є досить складні й тому вони або зовсім не включаються до програм лінійної алгебри (а це за звичай 1-і і 2- і курси) фізико-математичних факультетів чи технічних ВНЗ, або розглядаються досить поверхнево, що не надає повної змоги їх використання в науковій і дослідній роботі студентів і магістрантів при роботі над дипломними проектами, магістерськими дисертаціями, доповідями на наукові конференції, рефератами тощо. З огляду на скорочення лекційних і практичних занять ще гірше становище у технічних ВНЗ. До таких складних понять і процедур лінійної алгебри можна, зокрема, віднести такі: визначник матриці і процедура його обрахування, характеристичний многочлен матриці, її власні значення і власні вектори, процедури їх відшукання, зведення матриці до діагонального виду за допомогою матриці подібності і відшукання такої матриці [2, 4, 9, 11]. Наведені поняття і процедури вивчаються на фізико-математичних факультетах та в технічних ВНЗ, однак з огляду на складність та громіздкість наведених процедур за звичай на практиці розглядаються матриці не вище третього порядку, що недостатньо для наукової і дослідницької роботи студентів та належного розуміння самих понять.

Набагато складніша ситуація у випадку кратних коренів характеристичного рівняння матриці. Тоді канонічний вигляд матриці визначається елементарними дільниками матриці. Як відомо [4, 9, 11], у випадку кратних коренів характеристичного рівняння подібним перетворенням можна звести матрицю до діагонального виду тоді, коли елементарні дільники матриці будуть тільки лінійними. У інших випадках матриця зводиться до канонічного вигляду у формі Жордано, коли на діагоналі стоять клітини Жордано (там само). Кількість клітин Жордано та їх розмір визначається елементарними дільниками матриці, які визначаються не тільки на основі характеристичного рівняння матриці та його коренів. Кількість клітин Жордано канонічної форми матриці А рівна кількості елементарних дільників відповідної характеристичної матриці, а розмір клітин рівний кратності відповідного елементарного дільника. Складність наведених понять, складність і об'ємність низки теорем про їхні властивості, складність відповідних процедур їх відшукання призвело до того, що практично вони не розглядаються на фізматах педагогічних університетів та у технічних ВНЗ.

З теорії лінійної алгебри відомо [2, 4, 9, 11], що важливе значення мають функції від матриць, зокрема піднесення матриці до натурального степеня, добування кореня n-го степеня з матриці [4, 6], відшукання експоненти від матриці А тощо. Якщо $f(A)$ функція від матриці А, то справедлива рівність [4, 9, 11]

$$f(A) = H \cdot f(\Lambda) \cdot H^{-1}, \qquad (1)$$

де Н матриця перетворення подібності для матриці А, Λ-канонічна форма матриці А. Отже відшукання канонічного вигляду матриці А конче необхідно у багатьох дослідженнях та при викладанні різних навчальних дисциплін.

Наведені поняття і процедури необхідні у науковій та дослідницькій роботі студентів і магістрантів. Зокрема в електро- і радіотехніці багато задач приводять до математичних моделей у вигляді систем лінійних алгебраїчних та системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами, розв'язування котрих у матричній формі неможливе без відповідних знань і умінь про наведені поняття і процедури лінійної алгебри. Те ж саме можна сказати і про необхідність добування кореня n-го степеня з матриці А при побудові асимптотичних розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків зі змінними коефіцієнтами, при розв'язування системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами значного розміру (більше 4) тощо. До складнощів самих понять і складнощів процедур їх визначення ще добавляються і обчислювальні складнощі та складнощі перетворень, котрі виконати вірно вручну студенту чи магістранту при значних розмірах матриць за прийнятний час практично дуже сумнівно. Складнощі самих понять і відповідних процедур їх визначення, обчислювальні складнощі і складнощі громіздких перетворень, часові обмеження або зовсім унеможливлюють розглядання наведених проблем на лекціях і практичних в курсі лінійної алгебри, або розглядаються дуже схематично і, що головне, теоретичні положення не підкріплюються належними практичними прикладами, особливо з матрицями більш високого порядку (більше 4-го).

З іншого боку, професійна підготовка сучасного математика, особливо прикладника, чи кваліфікованого інженера вимагає володіння майбутніми фахівцями наведеними вище фундаментальними поняттями і процедурами лінійної алгебри, про що говорилося вище.

Подолання такої суперечності можливе на основі використання «прихованих» (закодованих) знань у сучасних інформаційно-комунікаційних технологіях (ІКТ) з можливостями реалізації наведених вище процедур (В.А. Кушнір [7]).

Теорія подібності матриць [4, 9, 11] говорить, що усі матриці розбиваються на непересічні класи подібних матриць.

***Мета статті*** полягає в дослідженні основних класів подібних матриць та у зведенні матриць певного класу до канонічного виду за допомогою Maple-технології. Точніше – за допомогою тієї бази знань з лінійної алгебри, котра умонтована у Maple-технологію і котра реалізується за допомогою простих команд-операторів.

***Завдання статті*** зводяться до побудови технології формування в студентів чи магістрантів наведених вище фундаментальних понять і відповідних процедур лінійної алгебри у Maple-середовищі та у практичному дослідженні матриць цих класів у цьому ж середовищі. Основні класи подібних матриць визначаються їх канонічною формою, точніше – класи матриць, що зводяться до: 1) діагональних матриць з різними простими власними значеннями; 2) діагональних матриць з кратними власними значеннями і відповідними елементарними дільниками першого порядку; 3) матриць Жорданової форми з одним n-кратним (n-розмір квадратної матриці) характеристичним значенням і декількома нелінійними та лінійними елементарними дільниками; 4) матриць Жорданової форми з декількома кратними коренями характеристичного рівняння, кожному з котрих відповідає декілька нелінійних та лінійних елементарних дільників. Завдання в тому, щоб «підібрати» (точніше сконструювати) квадратні матриці n-го порядку, котрі можна звести до наведених вище канонічних видів, що дасть змогу організації індивідуального навчання, тестування і т.п.

Стаття є продовженням розвитку комп’ютерної алгебри в Україні, відомими представниками котрого є академіки НАПН України М.І.Жалдак, В.Ю.Биков, їхні колеги і учні – Ю.В.Триус, Ю.С.Рамський, С.О.Семеріков, С.О.Раков, Н.В.Морзе та ін.

Загальний алгоритм побудови матриці A з канонічною формою $\Lambda$ такий: 1) записуємо канонічний вигляд матриці $\Lambda$ (у нашій статті один з чотирьох чи близький до них як «комбінований»); 2) генеруємо невироджену матрицю H; 3) знаходимо обернену $H^{-1}$; 4) знаходимо матрицю $A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1}$.

Для навчальних цілей бажано, щоб матриця мала своїми елементами цілі числа та ще й обмеженого значення. Хоча при використання Maple-середовища такі обмеження не істотні. Обмеження на величину елементів матриць $H$ та $H^{-1}$ мають методичне значення при розв’язуванні різних задач лінійної алгебри (систем лінійних рівнянь, при відшуканні матриці переходу від одного базису лінійного простору до іншого), розв’язуванні систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами тощо

***Задача 1.*** Сконструювати матрицю M таку, щоб обернена $M^{-1}$ мала тільки цілі елементи та ще й обмежені за величиною.

***Розв’язування*** задачі 1, так само як і наступних задач, будемо здійснювати в Maple-середовищі. Як відомо [4, 11] елементи оберненої матриці $M^{-1}$ одержуються діленням відповідних алгебраїчних доповнень на визначник матриці M. Отже, цілими будуть елементи матриці $M^{-1}$ за умови, що визначник матриці M буде рівним ±1. Тому потрібно визначити процедуру побудови матриці M, наприклад 5-го порядку, з визначником рівним 1 чи -1. Використовуючи розвинення визначника п’ятого порядку за елементами останнього рядка, бачимо, що визначник п’ятого порядку D5=1 буде при D4=1, D3=1, D2=1, D1=M[1,1]=1, де D4, D3, D2 – діагональні визначники матриці M.

**Процедура-програма 1 побудови матриці M** з тим, щоб її визначник був рівний 1, а її елементи та елементи $M^{-1}$ були цілими і обмеженими за величиною.

```
with(LinearAlgebra) :
k := 1 : j := 30 :
while k ≤ j do
n := 5 :
unassign('M') : M;
M := RandomMatrix(n, n, generator =−3 ..3);
M[1, 1] := 1;
for i from 2 by 1 to n do
unassign('x') :
M[i, i] := x;
M[i, i] := solve(Determinant(SubMatrix(M, [1 ..i], [1 ..i])) = 1, x); end do:
M1 := M^(-1) :
if abs(M[n, n]) ≤ 50  and abs(M[n − 1, n − 1]) ≤ 50 and MatrixNorm(M, 1) ≤ 100
    and MatrixNorm(M1, 1) ≤ 100 then
print('Варіант' k) :
print('M'= M) :
 print('Dt'= Determinant(M)) :
print('M1'= M1); k := k + 1 :end if:
end do:
```

Програма складена для визначення 30 варіантів матриць з визначником рівним одиниці і обмеженими елементами матриці M та оберненої до неї матриці M1. Наводимо тільки один із 30 варіантів.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M1 = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & 4 & 1 & -3 \\ 10 & -10 & -7 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ Dt = 1 \ .$$

Зауважимо, що оптимальні обмеження на величини елементів оберненої матриці визначалися на основі *комп'ютерного експерименту (методом спроб).*

***Задача 2.*** Сконструювати таку матрицю A, щоб вона мала різні власні значення і відповідну канонічну форму у вигляді діагональної матриці Λ з власними значеннями.

***Розв'язування.*** 1) сконструюємо не вироджену матрицю M з тим, щоб її визначник був рівний одиниці, а обернена матриця M1 мала обмежені числом 100 елементи; 2) сконструюємо діагональну матрицю Λ з різними числами по діагоналі; 3) запишемо шукану матрицю A

$$A = M.\Lambda.M1 \; ; \qquad (2)$$

4) знайдемо у Maple канонічну форму матриці A та матриці перетворення Q.

**Процедура-програма 2.**

```
with(LinearAlgebra) : z := rand(−4 ..4) :
k := 1 : j := 30 :
while k ≤ j do
n := 5 :
unassign('M') : M;

M := RandomMatrix(n, n, generator =−3 ..3);
M[1, 1] := 1;
for i from 2 by 1 to n do
unassign('x') :
M[i, i] := x;
M[i, i] := solve(Determinant(SubMatrix(M, [1 ..i], [1 ..i])) = 1, x); end do:
M1 := M^(-1) :
```

$\textbf{if}\ MatrixNorm(M1, 1) \le 100\ \textbf{then}$
$print('Варіант'\ k)$ :
$print('M'= M)$ :
$print('Dt'= Determinant(M))$ :
$print('M1'= M1)$;
$\Lambda := Matrix(n, n) : L := [seq(100, i = 1..n)]$ :
$s := 1$ :

$\textbf{while}\ s \le n\ \textbf{do}$
$\Lambda[s, s] := z()$ :
$\textbf{if}\ evalb(\Lambda[s, s] \notin L)\ \textbf{then}\ L[s] := \Lambda[s, s] : s := s + 1 : \textbf{end if}$:
**end do**:

$print('\Lambda'= \Lambda)$ :
$A := M.\Lambda.M1$ :
$print('A'= A)$ :
$J := JordanForm(A)$;
$Q := JordanForm(A, output = 'Q')$ :

$print('Q'= Q) : print('Q1'= Q^{-1}) : print(M.J.M1); k := k + 1$ :**end if**: **end do**:

Процедура конструює 30 матриць, канонічна форма котрих є діагональною матрицею з різними власними значеннями. Наведемо один із варіантів.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad M1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & -12 & 9 & -8 & -5 \\ 12 & -9 & 7 & -6 & -4 \\ 7 & -5 & 3 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; Dt = 1 \,.$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 88 & -64 & 51 & -44 & -29 \\ 174 & -127 & 102 & -88 & -58 \\ -62 & 46 & -33 & 30 & 20 \\ -166 & 121 & -90 & 80 & 51 \\ 22 & -14 & 6 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Шукана матриця А побудована. Матриця А, як і всі останні варіанти роботи процедури-програми 2, належать до класу матриць, канонічна форма котрих є діагональною матрицею з різними власними значеннями матриці А.

***Задача 3.*** Сконструювати матрицю А, котра мала б тільки кратні власні значення, кожному з яких відповідали б тільки лінійні елементарні дільники.

***Розв'язування.*** Як відомо [4, 9, 11], канонічною формою такої матриці А буде діагональна матриця Λ з власними значеннями. Причому різним власним значенням матриці А буде відповідати різна кількість елементарних дільників. Кількість елементарних дільників, що відповідають одному власному значенню матриці А, рівна кратності цього ж власного значення. Тому: 1) і 2) завдання такі ж, як і в задачі 2. 3) Конструюємо діагональну матрицю Λ з трьома різними елементами; 4) обчислюємо шукану матрицю А за формулою (2); 5) знаходимо у Maple власні значення λ матриці А і власні вектори матриці А у вигляді стовбців матриці E.

**Процедура-програма 3** конструює потрібну матрицю А (усього тридцять варіантів).

$with(LinearAlgebra) : with(MTM) : n := 5 : i := 1 : j := 30$ :
$\textbf{while}\ i \le j\ \textbf{do}$
$z := rand(1..3) : y := rand(-4..4)$ :
$\lambda1 := y(); \lambda2 := y()$;

**while** $\lambda 1 = \lambda 2$ **do** $\lambda 1 := y(\,)$; $\lambda 2 := y(\,)$; **end do**:
$k1 := z(\,)$; $k2 := n - k1$;
$t1 := Vector(\mathrm{k1}, \lambda 1)$;
$t2 := Vector(\mathrm{n} - \mathrm{k1}, \lambda 2)$;

$u := Vector(5, [t1, t2])$;
$\Lambda := Matrix(1..n, 1..n, u, shape = diagonal)$;
$M := RandomMatrix(n, n, generator = -3..3)$;

**if** $Determinant(M) = 0$ **then** $M := RandomMatrix(n, n, generator = -4..4)$; **end if**:
$M1 := M^{-1}$;
$A := M.\Lambda.M1$;
$\lambda, E := Eigenvectors(A)$;

$J := JordanForm(A)$; $Q := JordanForm(A, output = 'Q')$; $Q1 := Q^{-1}$; $Q.J.Q1$;
$print('Варіант'\ i)$ :
$print('M' = M, 'M1' = M1)$ :
$print('\Lambda' = \Lambda, 'A' = A)$ ;
$print('\lambda' = \lambda, 'E' = E)$ :
$i := i + 1$ : **end do**:

Наведемо один з варіантів результату роботи процедури-програми 3.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad M1 = \begin{bmatrix} \frac{37}{225} & \frac{77}{225} & \frac{11}{75} & \frac{4}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{44}{225} & \frac{49}{225} & \frac{7}{75} & -\frac{2}{25} & -\frac{3}{25} \\ \frac{28}{45} & \frac{23}{45} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{181}{225} & \frac{176}{225} & -\frac{7}{75} & \frac{2}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{19}{25} & \frac{24}{25} & -\frac{4}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{2}{25} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{74}{75} & \frac{154}{75} & -\frac{28}{25} & \frac{24}{25} & \frac{36}{25} \\ \frac{148}{225} & \frac{308}{225} & \frac{44}{75} & -\frac{34}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{74}{225} & \frac{154}{225} & \frac{22}{75} & \frac{8}{25} & -\frac{38}{25} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{54}{37} & -\frac{36}{37} & -\frac{33}{37} & -\frac{77}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

***Задача 4.*** Сконструювати матрицю A таку, що має одне власне n-кратне власне значення, котрому відповідає два елементарні дільники.

***Розв'язування.*** Пункти 1) і 2) такі ж, як і в задачі 2. 3) конструюємо матрицю з одним власним значенням (по діагоналі ці значення) і з двома клітинами Жордано. 4) Обчислюємо за формулою (2) матрицю A. 5) визначаємо елементарні дільники матриці A.

**Процедура-програма 4.**

$with(LinearAlgebra)$ : $k := 1$ : $j := 30$ : **while** $k \le j$ **do** $n := 5$ : $unassign('M')$ : $M$;
$M := RandomMatrix(n, n, generator = -3..3)$; $M[1, 1] := 1$;

**for** $i$ **from** 2 **by** 1 **to** $n$ **do**
$unassign('x')$ :
$M[i, \mathrm{i}] := x$;
$\mathrm{M[i, i]} := solve(Determinant(SubMatrix(M, [1..\mathrm{i}], [1..\mathrm{i}])) = 1, x)$; **end do**:

$M1 := M^{-1}$ :
**if** abs($M$[n, n]) $\leq 50$ **and** abs($M[n-1, n-1]$) $\leq 50$ **and** $MatrixNorm(M, 1) \leq 100$
**and** $MatrixNorm(M1, 1) \leq 100$ **then**

$print$('*Варіант*' $k$) :
$print$('$M$'= $M$) :
$print$('$Dt$'= $Determinant(M)$ ) :
$print$('M1'= M1);
$\Lambda := Matrix(n, n)$ :

**for** $s$ **from** 1 **by** 1 **to** $n$ **do** $\Lambda[s, s] := s$ :**end do**:
$p := iquo(n, 2)$ :
$v := rand(-3..3)$ : $z := rand(1..p)$ : $u := rand(1..p-1)$ :
$x := v()$ : $y := x$ : $k1 := z()$ : $k2 := n - k1$ :
$\Lambda := JordanBlockMatrix([[x, \mathrm{k1}], [y, k2]])$ ;

$print(\Lambda)$ :
$A := M.\Lambda.M1$ :
$print$('$A$'= $A$) :
$J := JordanForm(A)$;
$print$('$J$'= $J$);
$\lambda, E := Eigenvectors(A)$;
$print(\lambda, E)$;

$Q := JordanForm(A, output = 'Q')$ :
$print$('$Q$'= $Q$) : $Q1 := Q^{-1}$;
$print$('$Q1$'= $Q^{-1}$) :
$print(Q.J.\mathrm{Q1})$;
$k := k + 1$ :**end if**:
**end do**:

Наводимо один з варіантів роботи процедури-програми 4.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -3 & 10 \end{bmatrix}, \quad M1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -23 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Dt = 1, \ \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 16 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & -7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 13 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 17 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 23 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

З вигляду матриці Λ видно, що характеристичний многочлен матриці А має вигляд $f(\lambda) = (\lambda - 3)^5$, а елементарними дільниками матриці А будуть $(\lambda - 3)^4$ і $(\lambda - 3)$. Зауважимо, що елементарних дільників у характеристичній матриці буде стільки скільки вона має власних векторів. Для матриці А цього прикладу маємо матрицю, стовбцями котрої є такі власні вектори

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

що також визначається в Maple-середовищі.

***Задача 5.*** Сконструювати матрицю А, котра мала б різні кратні власні значення і відповідні кратні елементарні дільники, а канонічною формою мала б квазідіагональну матрицю з клітинами Жордано.

***Розв’язування.*** Повторюючи роздуми подібні попереднім задачам, приходимо до процедури-програми 5.

**Процедура-програма 5.**

```
with(LinearAlgebra) : k := 1 : j := 30 :
while k ≤ j do
 n := 5 :
 unassign('M') : M;
 M := RandomMatrix(n, n, generator =−3 ..3);
 M[1, 1] := 1;

for i from 2 by 1 to n do
unassign('x') :
M[i, i] := x;
M[i, i] := solve(Determinant(SubMatrix(M, [1 ..i], [1 ..i])) = 1, x); end do:
 M1 := M^(-1) :

if MatrixNorm(M, 1) ≤ 100 and MatrixNorm(M1, 1) ≤ 100 then
 print('Варіант' k) :
print('M'= M) :
 print('Dt'= Determinant(M)) :
 print('M1'= M1);
 Λ := Matrix(n, n) :

 for s from 1 by 1 to n do Λ[s, s] := s :end do:
  p := iquo(n, 2) :
  v := rand(−3 ..3) : z := rand(1 ..p) : u := rand(1 ..p − 1) :
 x := v( ) : y := v( ) : t := z( ) : k1 := z( ) : k2 := u( ) : k3 := n − k1 − k2 :
 while (x − y)·(x − t)·(y − t) = 0 or x·y·t = 0 do x := v( ) : y := v( ) : t := z( ) :end do:

 Λ := JordanBlockMatrix([[x, k1], [y, k2], [t, k3]]) ;
 print('Λ'= Λ) :
 A := M.Λ.M1 :
 print('A'= A) : Q := JordanForm(A, output = 'Q') :
 print('Q'= Q) :
 print('Q1'= Q^(-1)) :
k := k + 1 :end if:
 end do:
```

Результати роботи програми такі (один варіант).

$$M=\begin{bmatrix}1&-1&-2&2&3\\0&1&2&-2&-2\\-2&-2&-3&3&0\\3&0&1&0&0\\-3&-2&2&0&-12\end{bmatrix},\quad M1=\begin{bmatrix}0&6&4&2&-1\\-6&3&6&4&-2\\0&-18&-12&-5&3\\-4&-12&-5&-1&1\\1&-5&-4&-2&1\end{bmatrix},\quad Dt=1,$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}-20&-52&-20&-4&3\\16&39&14&2&-2\\-21&-21&2&7&-2\\-18&-27&-6&1&0\\-18&99&78&40&-19\end{bmatrix}.$$

Виходячи з вигляду матриці Λ, легко записати характеристичний многочлен та елементарні дільники матриці А:

$$f(\lambda)=(\lambda+1)^2\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)^2,\ d1=(\lambda+1)^2,\ d2=(\lambda-1),\ d3=(\lambda-2)^2.$$

Отже, розглянуто чотири основні види матриць-моделей, до котрих зводяться цілі класи квадратних матриць n-го порядку (у нас 5-го порядку):

$$\Lambda 1=\begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda 5 \end{bmatrix};\ \Lambda 2=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\ \Lambda 3=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix};\ \Lambda 4=\begin{bmatrix} \lambda 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda 2 \end{bmatrix}; \tag{3}$$

1) Квадратні матриці А, що зводяться до діагональних матриць виду $\Lambda 1$ , мають різні характеристичні числа $\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j$ .

Такі матриці мають n різних власних векторів і n лінійних елементарних дільників виду $\lambda - \lambda_i$ . Для відшукання власних значень і власних векторів матриці А (у вигляді матриці Т) Maple має команду-оператор

$$\lambda, T := Eigenvectors(A) ,$$

для відшукання матриці $\Lambda 1$ команду-оператор

$$\Lambda 1 := JordanForm(A) .$$

Для відшукання матриці перетворення Q існує команда-оператор

$$Q := JordanForm(A, output='Q')$$

2) Квадратні матриці А, що зводяться до діагональних матриць виду Λ2, мають одне кратне характеристичне число λ, котрому відповідають однакові лінійні елементарні дільники. Такі матриці мають n різних власних векторів.

3) Квадратні матриці А, що зводяться до виду $\Lambda 3$ , мають одне кратне характеристичне число λ, котрому у нашому випадку відповідають декілька кратних чи простих елементарних дільники виду $\left(\lambda - \lambda 1\right)^2$ ; $\left(\lambda - \lambda 1\right)^3$ .

Число власних векторів і елементарних дільників матриць А, котрі зводяться до виду $\Lambda 3$ співпадають.

4) Квадратні матриці А, що зводяться до виду Λ4, мають декілька кратних чи простих елементарних дільників. Число власних векторів таких матриць співпадає з числом елементарних дільників.

Ми розглянули чотири «базові» чи «фундаментальні» види матриць-моделей, до котрих перетворенням подібності зводяться різні квадратні матриці А. Матриці Λ інших видів, до котрих зводяться квадратні матриці А, можна розглядати як різні «комбінації» наведених матриць $\Lambda 1,\ \Lambda 2,\ \Lambda 3,\ \Lambda 4$ .

Наведені вище програми дозволяють в автоматичному режимі конструювати матриці 5-го порядку (чи нижчих порядків) за прийнятний час (менше хвилини) в достатній кількості різних варіантів, що дозволяє ефективно організувати індивідуальне навчання, тестування, контрольні роботи з індивідуальним завданнями тощо. Конструювання матриць вищих порядків (шостого і вище) вимагає набагато більше часу (десятки хвилин). Однак, при наявності часових можливостей (чи обчислень в паралельному режимі) матриці вищих порядків також можна конструювати в автоматизованому режимі.

Дослідження студентами квадратних матриць у плані розуміння таких фундаментальних понять лінійної алгебри як визначник матриці, характеристичний многочлен, характеристичні числа, власні вектори, елементарні дільники, подібні перетворення матриці, зведення матриці подібним перетворенням до діагональної форми чи форми Жордано та знаходження відповідних математичних об’єктів для конкретних матриць з огляду на складність самих понять та складність відповідних процедур їх визначення в ручному режимі проблематичне, а середовище Maple дозволяє досить ефективно створювати моделі матриць Λ різних видів, знаходити відповідні матриці A, що значно розширює кругозір студентів і магістрантів в аспекті фундаментальних понять лінійної алгебри, підвищує можливості (інформаційний, творчий, когнітивний ресурси) розв’язування ними наукових чи дослідницьких задач.

Зведення матриць до видів $\Lambda 1,\ \Lambda 2,\ \Lambda 3,\ \Lambda 4$ досить широко застосовується при розв’язуванні систем лінійних диференціальних рівнянь [2, 4]. Тим більше, що з огляду на співвідношення (1) фактично функції від квадратних матриць зводяться до функцій від матриць виду $\Lambda 1,\ \Lambda 2,\ \Lambda 3,\ \Lambda 4$. Зокрема при побудові асимптотичних розв’язків систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків (порядок похідних) з малим параметром при похідних виникає проблема добування кореня n-го степеня з матриць виду (3) [6].

***Задача 6.*** Знайти квадратні і кубічні корені з матриць виду $\Lambda 1$та матриць виду $\Lambda 4$ (клітини Жордано)

$$\Lambda 4 := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad W := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

***Розв’язування.*** З теорій лінійної алгебри відомо [4], що

$$\sqrt[k]{\Lambda 4} = \sqrt[k]{\lambda \cdot E + W} = \sqrt[k]{\lambda} \cdot E + \frac{1}{k} \cdot \frac{\sqrt[k]{\lambda}}{\lambda} \cdot W +$$
$$\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left( \frac{1}{k} - 1 \right) \frac{\sqrt[k]{\lambda}}{\lambda^2} \cdot W^2 + \ldots \qquad (5)$$

Якщо n-розмір матриці, то [4] з огляду на (4)

$$W^n = 0\ (нуль - матриця).$$

Запишемо формулу (5) кубічного кореня (для квадратного розписується аналогічно) з матриці

$$\Lambda 5 := \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Обчислення виконаємо в середовищі Maple.

**Процедура-програма 6.**

$with(LinearAlgebra) : E := Matrix(5,5) :$

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : A := \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} : W := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$$

$$C := 2\cdot E + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{8}\cdot W + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\frac{2}{64}\cdot W^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot 2}{8^3}\cdot W^3$$
$$+ \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\cdot 2}{8^4}\cdot W^4;$$

*'Перевірка'; C.C.C;*

Результати роботи програми 6 такі

$$C := \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{288} & \frac{5}{20736} & -\frac{5}{248832} \\ 0 & 2 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{288} & \frac{5}{20736} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{288} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Перевірка

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Операція добування кубічного кореня з матриці А виконана вірно. Отримано один з можливих коренів.

Наведені задачі і відповідні процедури-програми конструювання матриць у вище висвітленому сенсі та їх застосування можуть слугувати основою студентських чи магістерських проектів, рефератів, курсових, дипломних, магістерських.

Стаття апробована в Кіровоградському державному педагогічному університеті ім. В.Винниченка при викладанні курсів диференціальних рівнянь (не педагогічна спеціальність «інформатика», 2 –й курс; педагогічна спеціальність «математика і інформатика», 3-й курс); в курсах «асимптотичні методи в диференціальних рівняннях» та «вибрані питання математики» – вибрані питання комп'ютерної алгебри (магістратура, 6-й курс). Результати педагогічного експерименту позитивні. Зокрема: 1) Студенти і магістранти розширили власну фундаменльну математичну (нові фундаментальні поняття лінійної алгебри та відповідні не менш фундаментальні процедури)) і фундаментальну інформатичну (реалізація фундаментальних понять інформатики в середовищі Maple) бази (В.А. Кушнір [7] ,С.О. Семеріков [10]); 2) заняття проводилися як бінарні (В.А. Кушнір [8]) з математики і інформатики, коли одночасно студенти освоювали нові фундаментальні як математичні, так і інформатичні знання, формували в собі відповідні інтегративні уміння; 3) громіздкі перетворення й обчислення виконувалися в Maple-технології, що не тільки економить час, а і концентрує увагу і зусилля студентів саме на фундаментальні поняття і процедури лінійної алгебри і інформатики; 4) на кожному практичному занятті студенти чи магістранти працювали в Maple-середовищі за індивідуальними завданнями під керівництвом викладача (зона ближнього розвитку за В.С. Виготським) та за індивідуальними завданнями при самопідготовці (зона активного розвитку за В.С. Виготським), що значно підвищило ефективність занять; 5) зросла активність студентів під час практичних занять; 6) результати праці усіх студентів чи магістрантів на практичних заняттях оцінювалися викладачем в кінці заняття, що підвищило мотивацію студентів і магістрантів до навчання; 7) загалом створювалося нове навчально-інформаційне середовище; 8) створення студентами навіть невеликих програм у Maple-середовищі вимагає від студентів чи магістрантів доскональних відповідних знань з математики (у нас лінійної алгебри); 8) можливість роботи студентів чи магістрантів на практичних заняттях за різними темпами («темпоральність» заняття») і, відповідно, отримання вищої оцінки.

Серед труднощів такого підходу до навчання математики і інформатики можна назвати такі: 1) недостатня сформованість у студентів та магістрантів фундаментальних понять з лінійної алгебри та інформатики, особливо в плані їх практичного застосування; 2) низький рівень сформованості умінь студентів і магістрантів для навчання в умовах бінарних занять; 3) недостатня кількість комп'ютерів в лабораторіях і робота за одним комп'ютером двох студентів, що значно знижує результативність бінарних занять; 4) відсутність дистанційних форм консультацій студентів чи магістрантів; 5) на перших двох-трьох заняттях бінарного виду створюється незвична для студентів чи магістрантів, зовсім нового типу навчальна ситуація, що також викликає суттєві труднощі в організації заняття; 6) деякі студенти швидко оволодівають математичною складовою бінарних занять, але «не в ладах» з інформатикою, інші – навпаки; 7) складність індивідуального оцінювання усіх студентів на практичних заняттях, відповідна необхідність розробки зрозумілих студентам критеріїв оцінки результатів індивідуального учіння.

Наші теоретичні роздуми і експериментальні дослідження показали, що бінарні заняття спонукають викладачів до нових наукових розробок: 1) достатньої кількості варіантів однотипних завдань (особливо, їх отримання в автоматичному режимі); 2) методик розробки варіантів завдань на основі індивідуального чи «рівневого» підходів; 3) навчальна аудиторна робота студентів відбувається за різними темпами (не має ніяких обмежень, окремі студенти можуть виконати в півтора-два рази більше завдань, ніж основна маса студентів). Викладачем повинна бути розроблена відповідна методика; 4) методика оцінювання успіхів (чи невдач!) студентів під час практичного заняття, зокрема, критерії оцінювання результатів учіння за одне заняття; 5) методика аналізу проведеного заняття (зокрема і урахування думок щодо заняття студентів чи магістрантів!), виявлення та оцінювання позитивів і негативів кожного заняття і корегування наступних занять з метою зменшення чи усунення негативів (своєрідна «рефлексія заняття»); 6) методика оформлення студентами у певній формі і перевірка індивідуальних завдань самопідготовки (домашніх завдань): оформлення на папері у вигляді виконаних завдань; у вигляді невеликих чи за цілою темою рефератів; оформлення домашніх завдань (зокрема у вигляді світлин) в електронному вигляді і розміщення на спеціальних форумах; 7) методика організації зв'язку викладач-студенти, комунікативність між студентами під час занять.

Стаття буде корисною студентам, магістрантам, викладачам, молодим науковцям. Рекомендуємо джерела [1 –12].

## *СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ*


1. Аладьев В.З. Основы программирования в Maple. – Таллин: 2006. – 301 с.
2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 780 с.
3. Биков В.Ю. Моделі організаційних систем відкритої освіти. – К.: «Атака». – 2009. –684 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука. – 1967. – 575 с.
5. Гончаренко С.У. Фундаментальність освіти як дидактичний принцип // Шлях освіти. – 2008. – № 1 (47). – С. 2 – 6.
6. Кушнир В.А. Асимптотические разложения решений систем линейных дифференциальных уравнений высших порядков с малым параметром при производной: Дис. … канд. физмат. наук. – К.: 1984. – 139 с.
7. Кушнір В.А. Проблеми поєднання фундаментального і інноваційного при вивченні математики у вищих навчальних закладах // Витоки педагогічної майстерності: Зб. наук. праць / Полт. педаг. універ. ім.В.Г.Короленка. – Полтава, 2015 С. 161 – 172.
8. Кушнір В.А. Технологія бінарних занять з диференціальних рівнянь і інформатики у ВНЗ на основі Maple-середовища // Інформаційні технології в освіті. – 2016. – № 25. – С. 7-26
9. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
10. Семеріков С.О**.** Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі: Монографія / Науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М.І. Жалдак. – Кривий Ріг: Мінерал; К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – 340 с.: іл. – Бібліогр.: С. 284–339.
11. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наук, 1970. – 564 с.
12. Maple Programming Guide / [L. Bernardin, P.Chin, P.DeMarco, R.O.Geddes, D.E.G,Hare, K.M.Heal, G.Labahn, J.P.May, J.McCarron, M.B.Monagan, D.Ohachi, and S.M.Vorkortter]. – Prindet Canada: Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc., 2011. – 703 p.


Стаття надійшла до редакції 23.05.16

**Basil Kushnir**

**Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko State Pedagogical University, Kirovohrad, Ukraine**

**MODELING IN MAPLE AS THE RESEARCHING MEANS OF FUNDAMENTAL CONCEPTS AND PROCEDURES IN LINEAR ALGEBRA**

The article is devoted to binary technology and "fundamental training technology." Binary training refers to the simultaneous teaching of mathematics and computer science, for example differential equations and Maple, linear algebra and Maple. Moreover the system of traditional course of Maple is not performed. The use of the opportunities of Maple-technology in teaching mathematics is based on the following fundamental concepts of computer science as an algorithm, program, a linear program, cycle, branching, relative operators, etc. That’s why only a certain system of command operators in Maple is considered. They are necessary for fundamental concepts of linear algebra and differential equations studying in Maple-environment. Relative name - "the technology of fundamental training" reflects the study of fundamental mathematical concepts and procedures that express the properties of these concepts in Maple-environment. This article deals with the study of complex fundamental concepts of linear algebra (determinant of the matrix and algorithm of its calculation, the characteristic polynomial of the matrix and the eigenvalues of matrix, canonical form of characteristic matrix, eigenvectors of matrix, elementary divisors of the characteristic matrix, etc.), which are discussed in the appropriate courses briefly enough, and sometimes are not considered at all, but they are important in linear systems of differential equations, asymptotic methods for solving differential equations, systems of linear equations. Herewith complex and voluminous procedures of finding of these linear algebra concepts embedded in Maple can be performed as a result of a simple command-operator.

Especially important issue is building matrix to canonical form. In fact matrix functions are effectively reduced to the functions of the diagonal matrix or matrix in Jordan canonical form.

These matrices are used to rise a square matrix to a power, to extract the roots of the n-th degree of a square matrix, to calculate matrix exponent, etc. The author creates four basic forms of canonical models of matrices and shows how to design matrices of similar transformations to these four forms. We introduce the programs-procedures for square matrices construction based on the selected models of canonical matrices. Then you can create a certain amount of various square matrices based on canonical matrix models, it allows to use individual learning technologies.

The use of Maple-technology allows to automate the cumbersome and complex procedures for finding the transformation matrices of canonical form of a matrix, values of matrices functions, etc., which not only saves time but also attracts attention and efforts on understanding the above mentioned fundamental concepts of linear algebra and procedures for investigation of their properties. All these create favorable conditions for the use of fundamental concepts of linear algebra in scientific and research work of students and undergraduates using Maple-technology.

**Keywords:** fundamental concepts of linear algebra, training "fundamental technology", binary training technology, the canonical form of matrix, functions of matrices, Maple-environment.

**Кушнир Василий**
**Кировоградский государственный педагогический университет им. В. Винниченко, Кировоград, Украина**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ MAPLE КАК СРЕДСТВО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ И ПРОЦЕДУР ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ**

Статья посвящена технологии бинарного и «технологии фундаментального обучения». Под бинарным обучением понимается одновременное обучение математики и информатики, например, дифференциальных уравнений и Maple, линейной алгебры и Maple. При этом системного традиционного курса Maple не проводится. Использование возможностей Maple-технологии при преподавании математики основывается на таких фундаментальных понятиях информатики как алгоритм, программа, линейная программа, цикл, разветвление, условные операторы и тому подобное. Поэтому рассматривается только определенная система команд-операторов Maple, которые необходимы при изучении понятий линейной алгебры и дифференциальных уравнений в Maple-среде. Условное название «технология фундаментального обучения» отображает исследование фундаментальных математических понятий и соответствующих процедур, которые выражают свойства этих понятий, в Maple-среде. В этой статье исследуются сложные фундаментальные понятия линейной алгебры (определитель матрицы и способ его вычисления, характеристический многочлен матрицы, и собственные значения матрицы, каноническая форма матрицы, собственные векторы матрицы, элементарные делители характеристической матрицы и тому подобное), которые рассматриваются в соответствующих курсах обзорно, а то и вовсе не рассматриваются. В тоже время они имеют важное значение в линейных системах дифференциальных уравнений, асимптотических методах решения систем дифференциальных уравнений, системах линейных алгебраических уравнений. При этом сложные и громоздкие процедуры определения приведенных понятий линейной алгебры встроены в Maple и могут выполняться простой командой-оператором.

Особенно важна проблема приведения матрицы к каноническому виду ибо функции от матриц фактически сводятся к функциям от диагональных матриц или матриц в форме Жордано. Именно эти формы используются при возведении квадратных матриц в степень, извлечении корня n-й степени из квадратных матриц, вычислении экспоненты от матриц и т.п. Автор рассматривает четыре базовые канонические формы-модели матриц и показывает, как конструировать матрицы, которые подобным преобразованием приводятся к этим четырем формам. Приводятся программы-процедуры конструирования квадратных

матриц на основе выбранных канонических матрицах-моделях. Тогда можно создать в автоматическом режиме достаточное количество вариантов квадратных матриц на основе выбранных канонических матрицах-моделях, что позволит применять индивидуальные технологии обучения.

Использование Maple-технологии позволяет автоматизировать громоздкие и сложные процедуры вычисления матрицы преобразования, канонической формы матрицы, значений функций от матриц и тому подобное, что не только экономит время, а и концентрирует внимание и усилия студентов и магистрантов на понимании приведенных выше фундаментальных понятиях линейной алгебры и процедур исследования их свойств. Все это создает способствующие условия использования студентами и магистрантами фундаментальных понятий линейной алгебры в научной и исследовательской работе с использованием Maple-технологии.

**Ключевые слова:** фундаментальные понятия линейной алгебры, «фундаментальная технология обучения», бинарная технология обучения, каноническая форма матриц, функции от матриц, Maple-среда.