УДК 519.25

Еремеев В. С., Кузьминов В. В.
Мелитопольский государственный педагогический университет им. Б. Хмельницкого

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В СЛУЧАЕ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Разработан метод статистического анализа педагогического эксперимента для независимых выборок без ограничения на закон распределения случайной величины. Метод основан на построении функции распределения с помощью сплайнов. В среде алгоритмического языка Delphi-7 составлена программа, которая позволяет найти интегральные функции распределения и проверить нулевую гипотезу для произвольного уровня значимости. Эффективность метода проверена путём сравнения с результатами анализа педагогического эксперимента в случае выполнения нормального закона Лапласа.

Ключевые слова: *выборочные данные, нулевая гипотеза, педагогический эксперимент, программа, сплайны, статистические методы, уровень значимости, функция распределения.*

Введение

Теория вероятности [1], [2]включена в учебные планы подготовки специалистов практически всех направлений, что предопределило широкое применение статистических методов исследования во многихтеоретических и прикладных науках [2], [3]. В частности, статистические методы используются при планировании, проведении и обработке педагогических экспериментов, о чём свидетельствуют многочисленные публикации [4], [5] и программные продукты [6], [7], облегчающие выполнение расчётов. Наибольшее распространение получили параметрические и непараметрические статистики, которые в явном или неявном виде используют предположение о выполнении конкретных функций распределения случайной величины (нормальное распределение, распределение Стьюдента, распределение χ^2 и т. д.). Подобный подход не всегда оправдан при анализе педагогического эксперимента. Поэтому разработка методов, свободных от ограничивающих предположений относительно выполнения того или иного закона распределения, актуальна и представляет практический интерес.

Объект исследования – статистическая обработка педагогического эксперимента.

Предмет исследования – метод статистическогоанализа педагогического эксперимента без требования к выполнению конкретного закона распределения случайной величины.

Цель исследования – разработка метода статистического анализа педагогического эксперимента на основе эмпирической функции распределения.

Гипотеза исследования – предлагаемый метод позволит с заданной вероятностью определить достоверность нулевой гипотезы в случае независимых выборок, полученных в результате выполнения педагогического эксперимента.

1. Проблематика статистической обработки педагогического эксперимента

Методика проведения и анализа педагогического эксперимента достаточно подробно изложена во многих публикациях. Классические исследования С. И. Архангельского, Ю. К. Бабанского [8], [9] и других учёных нашли развитие в более поздних работах, например, в работах [4], [5] и других исследованиях. Педагогический эксперимент обычно проводится с целью выбора одной из лучших методик проведения учебных занятий. Для этого формируются равнозначные группы учеников. В одной из них (контрольная группа) занятия проводятся по традиционной методике, в другой (экспериментальной группе) – по новой методике. Результативность новой методики проверяется с использованием статистических методов [1], [2], [3]. Достоверность нулевой гипотезы H_0 о равнозначности методик обучения чаще всего выполняется с помощью критериев Стьюдента, Пирсона, Фишера, Макномери, Вилконсона-Манна-Уитни, Колмогорова – Смирнова и других [4], [5], [8], [9].

При проверке справедливости высказанного предположенияс помощью нулевой гипотезы H_0 имеется определенная, пусть в ряде случаев и незначительная, вероятность допущения ошибки. Ошибка первого рода состоит в том, что в процессе статистического анализа отвергается гипотеза H_0, которая в действительности верна. Вероятность совершить ошибку подобного рода называется уровнем значимости и обозначается через α. Значение α обычно принимается равным 0.05. Если величина критерия К, рассчитанная по данным педагогического эксперимента, попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы H_1.В этом случае гипотеза H_1 выполняется с вероятностью 1- α. Примеры различных критических областей, выделенных штриховкой, представлены на рис. 1.

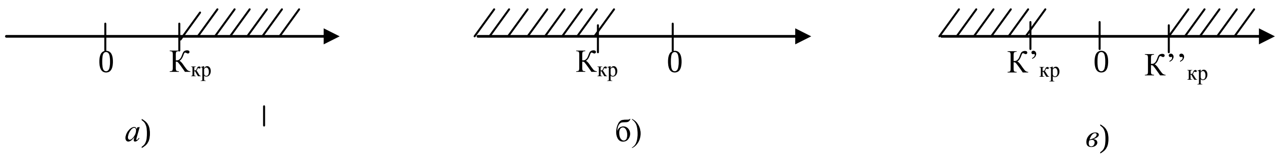

Рис. 1. Примеры критических областей на числовой оси

Из определения уровня значимости α следует, что вероятность P допустить ошибку первого рода, т. е. отвергнуть правильную гипотезу для правосторонней критической области, рис.1а, равна

$$P(K > K_{кр}) = \alpha \qquad (1)$$

Аналогичным образом определяется вероятность отвергнуть гипотезуH_0 в случае других критических областей.

Планирование, проведение и статистическая обработка педагогического эксперимента предусматривает выполнение следующих четырёх этапов:

– формирование контрольной и экспериментальной групп учащихся;
– проведение эксперимента и определение выбранных статистических параметров (среднее выборочное, дисперсия, мода, медиана и т. д.);
– формулировка нулевой H_0 и альтернативной H_1гипотез ивыбор критерияК для проверкиH_0;
– расчёт критерия К и проверка нулевой гипотезыH_0: если К попадает в критическую область, гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы H_1.

В основе статистических исследований на четвёртом завершающем этапележит предположение о выполнении *известного конкретного закона распределения случайной величины*, что во многих экспериментах далеко от истины. Поэтомусоздание методов анализа в случае неизвестного закона имеет практическое значение. Настоящая работа посвящена изложению метода статистической обработки, который основан на эмпирической функции распределения и не привязан к конкретному закону распределения.

2. Постановка задачи и алгоритм её решения

Рассмотрим результаты проведения педагогического эксперимента с целью сравнения различных методик проведения занятий в двух независимых группах объёмом N_1(контрольная) и N_2(экспериментальная). Пусть количественная оценка знаний учащихся x_i лежит в интервале [a, b]. Первичные результаты удобно представлять в ранжировочном виде, как это показано в табл.1.

Таблица 1.

Результаты педагогического эксперимента в одной из групп

Номер, k	1	2	3	…	k	…	N
Оценка, x_k	x_1=a	$x_2 \geq x_1$	$x_3 \geq x_2$	…	$x_k \geq x_{k-1}$	…	x_N=b$\geq x_{N-1}$

Разобъём отрезок [a,b] на n одинаковых интервалов величиной (b-a)/n с координатами границ

a+((b-a)(i-1)/n, a+(b-a)i/n], i=1, 2…n (2)

где n равно наименьшему целому числу, которое больше квадратного корня из объёма выборки N.

Обозначим количество оценок, попавших в i -й интервал, через n_i. Тогда эмпирическую функцию распределения оценок F(x) можно представить в виде ступенчатой функции [3,113]:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ldots\ldots\ldots\ldots x = x_1 = a \\ \frac{n_1}{n},\ldots\ldots\ldots\ldots x \le a + \frac{(b-a)}{n} \\ \frac{n_1+n_2}{n}, \frac{(b-a)}{n} < x \le a + 2\frac{(b-a)}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ldots\ldots\ldots\ldots x \le b \end{cases} \ldots\ldots\ldots(3)$$

Построим кубический сплайн s(x), который проходит через точки

$(x_i, F(x_i))$, x_i = a+i(b-a)/n, i=0,1,2,…n. (4)

На каждом из отрезков $[x_{1-i}, x_i]$, i=1, 2,…n будем искать функцию s(x)=s_i(x) в виде многочлена третьей степени

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \quad (5)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i - коэффициенты, подлежащие определению.

Из теории построения кубических сплайнов известно, что между коэффициентами многочленов a_i, b_i, c_i, d_i существует следующая зависимость [10]:

$$a_0 = f(x_0),\ a_i = f(x_i), i = \overline{1,n}.$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad (6)$$

$$(i = \overline{1,n}, \qquad h_i = x_i - x_{i-1})$$

Для определения коэффициентов c_i имеется дополнительная система линейных алгебраических уравнений [10]:

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \quad (7)$$
$$(i = \overline{1, n-1}, c_0 = c_n = 0).$$

Вычисление коэффициентов c_i путём решения системы (7) методом прогонки и последующее нахождение коэффициентов a_i, b_i, d_i. из системы уравнений (6) позволяет определить сплайн s(x), который является непрерывной функцией и имеет непрерывную производную:

$$f(x) = \begin{cases} b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2, & \text{якщо } x_{i-1} < x < x_i \\ i = 1....n \end{cases} \quad (8)$$

Сплайн s(x) является прообразом неизвестной функции распределения случайной величины, поэтому его производная f(x) может рассматриваться как прообраз плотности этой функции распределения φ(x).

Известно, что формулы для математического ожиданияM [3,72] и дисперсииD [3,75] определяются интегралами

$$M = \int_a^b x\varphi(x)dx \quad (9)$$

$$D = \int_a^b (x - M)^2 \varphi(x)dx \quad (10)$$

где φ(x) –плотность распределения.

Подставляя в формулы (9) и (10) вместо плотности распределения φ(x) её прообраз в виде функции f(x), можно оценить неизвестные математическое ожидание и дисперсию по формулам.

$$a = \int_a^b xf(x)dx \quad (11)$$

$$s^2 = \int_a^b (x - a)^2 f(x)dx \quad (12)$$

Значения a и s^2 служат статистической оценкой неизвестных математического ожиданияMи дисперсииD. Отметим, что из определения a и s^2 с помощью формул (11) и (12) их величины должны быть близки к среднему выборочному и дисперсии, которые вычисляются непосредственно из первичных данных, представленных в табл. 1.

3. Описание расчётной программы

Для обработки экспериментальных данных по методике, изложенной в пункте 2, создана программа STATIST в программной оболочке Delphi - 7. Программа содержит две формы – основную, предназначенную для ввода и вывода информации, рис. 2, и формы для вывода сплайна (прообраз функции функции распределения) и его производной (прообраз плотности функции распределения), рис. 3.

Кнопка «Загрузить из файла» на рис. 2 обеспечивает загрузку выборки с оценками каждого ученика из текстового файла. Кнопка «Записать файл» позволяет ввести данные с клавиатуры. Количество оценок при ручном введении регистрируется кнопкой «Число членов группы». После введения данных необходимо нажать кнопку «Рассчитать параметры». В поле выводапоявится информация с рассчитанными по формулам (11), (12) оценками для математического ожидания и дисперсии. При нажатии на кнопку «Показать графики распределения» появится форма изображения сплайна и его функции распределения.

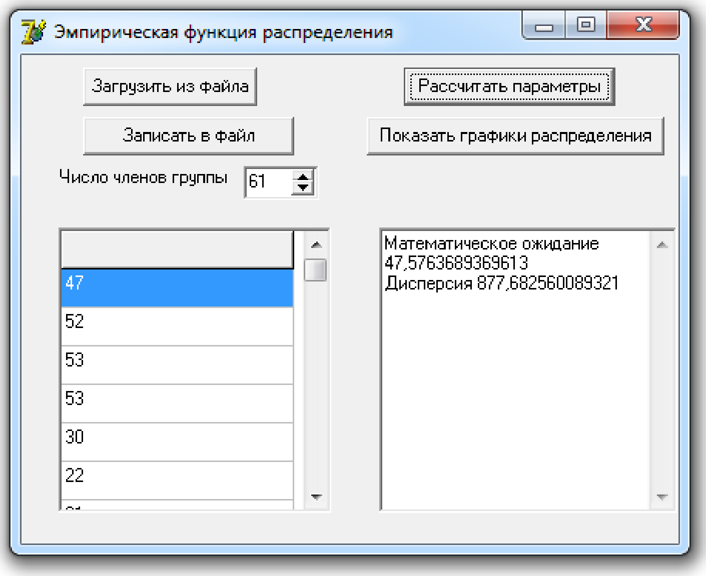

Рис. 2. Интерфейс формы ввода-вывода информации

4. Тестирование разработанного метода

Тестирование программы STATIST проводилось на примере обработки выборочных данных объёмом n=44. Выборка формировалась с помощью генератора случайных чисел, распределение которых подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием M=50 и дисперсией D=225. Значения вариант из этой выборки заносились в текстовый файл. Результаты построения сплайна, являющегося прообразом функции распределения, и его производной, служащей аналогом плотности распределения, приведены на рис. 3. Из графика на рис. 3 видно, что формы сплайна и его производной близки к аналогичным формам для нормального распределения. Рассчитанное среднее выборочное a =52 и дисперсия s^2 =210 близки к соответствующим теоретическим значениям M=50, D=225.

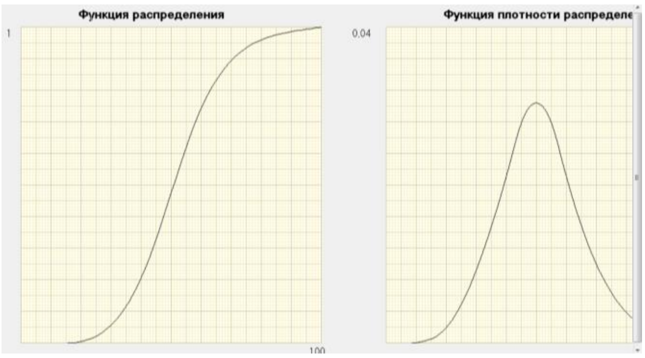

Рис. 3. Сплайн и его проиводная, объём выборки n=44, среднее выборочное a =52, дисперсия s^2 =210

5. Рекомендации по использованию программы STATIST

Предложенный алгоритм построения сплайна и его производной на основании эмпирической функции распределения можно применять для статистического анализа педагогического эксперимента в случае независимых выборок объёмом более 20-30 репрезентов без ограничений на закон распределения. На рис. 4 схематически представлены производные сплайна, найденные с использованием программы STATIST в двух группах (контрольной и экспериментальной). Форма кривых на рис.4а и 4в близка к форме для нормального закона. Кривые на рис. 4б отличаются от традиционных распределений.

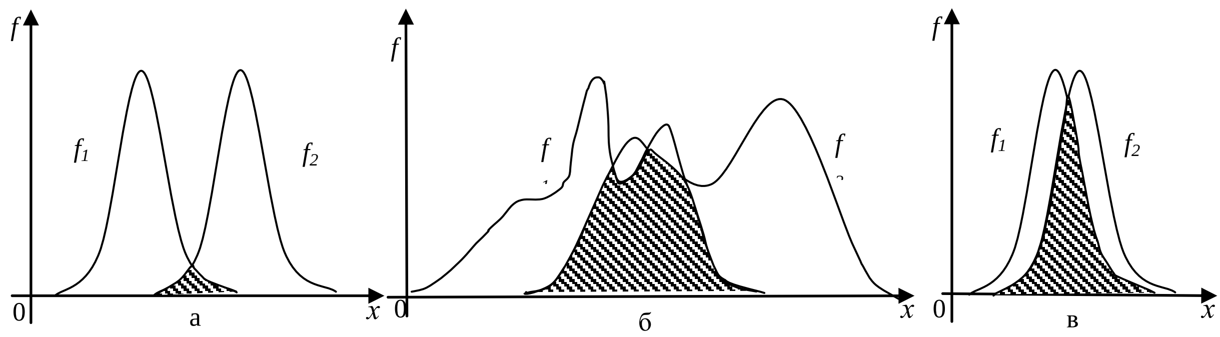

Рис.4. Примеры производных сплайна, являющихся аналогом неизвестных плотностей функции распределения оценок учащихся в контрольной и экспериментальной группах

Вероятность P_0 того, что оценки в контрольной и экспериментальной группах совпадают, равна площади заштрихованных областей на рис.4. Эта площадь вычисляется с помощью интеграла:

$$P_0 = \int_a^b g(x)dx \qquad (13)$$

где $g(x)=f_1(x)$, если $f_1(x) \le f_2(x)$, и $g(x)=f_2(x)$, если $f_1(x)>f_2(x)$.

Зная алгоритм вычисления f(x) (формула (8)), легко определить P_0 по формуле Симпсона. Значения P_0 для вариантов (а), (б) и (в) равны примерно 0,1; 0,5 и 0,7 соответственно. Величина P_0 может быть использована в качестве статистического критерия. Рассмотрим два случая его применения.

Случай первый (использование гипотезы H_0). Пусть на основании педагогического экспериментав контрольной и экспериментальной группах найдены эмпирические функции распределения и прообразы плотностей распределения $f_1(x)$ и $f_2(x)$, примеры которых представлены на рис. 4. Сформулируем нулевую гипотезу H_0: успеваемость учеников в контрольной и экспериментальной группах одинакова с 5%-м уровнем значимости (α=0,05). Рассчитаем критерий P_0 по формуле (13). Если окажется, что $P_0 > \alpha$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы H_1.

Случай второй. Пусть педагогический эксперимент проведён по схеме, изложенной в первом случае и с использованием формулы (13) рассчитан критерий P_0. По самому определению величина P_0 равна вероятности события, для которого оценки учеников в контрольной и экспериментальной группах совпадают. Следовательно, можно утверждать, что вероятность равнозначности двух методик равна P_0. В примере на рис. 4а значение P_0 = 0.1, что даёт основание говорить обих различии.

Отметим особенности разработанного алгоритма проведения статистического анализа:

- традиционные статистические методы обычно базируются на сравнении точечных оценок для двух или более выборок (среднее выборочное, дисперсия и т. д.); предлагаемый метод использует эмпирическую функцию распределения и является по своей сути интегральным;

- критерий P_0 вычисляется по формулам (13) и (8), которые содержат только экспериментальные данные, что не требует ограничивающих предположений о виде неизвестного закона распределения; вместо неизвестного закона применяется его аналог в виде сплайна.

Выводы

Предложен алгоритм статистического анализа педагогического эксперимента в случае независимых выборок. Алгоритм основан на представлении экспериментальных данных в виде эмпирической функции распределения с использованием кубических сплайнов и эмпирической плотности распределения. Это позволяет рассчитать вероятность P_0

равнозначных событий в контрольной и экспериментальной группах. Величина P_0 может использоваться в качестве критерия для проверки нулевой гипотезы или для определения эффективности нового метода обучения в вероятностном исчислении. Предлагаемый метод не требует ограничивающих предположений о виде закона распределения.

В среде алгоритмического языка Delphi -7 разработана программа STATIST, которая облегчает проведение расчётов. Тестирование программы и алгоритма расчётов подтверждает корректность предлагаемого метода для выборок объёмом более 20-30.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННІХ ИСТОЧНИКОВ

1. Коваленко И.Н. Теория вероятностей и математическая статистика/ И.Н.Коваленко, А.А. Филиппова. – М.: Наука, 1986. – 575 с.
2. Жалдак М. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник для студентів фізико-матем. спеціальностей педагог. університетів. Вид.2, перероб і доп. / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьмина, Г.О. Михалін. – Полтава: «Довкілля-К», 2010. – 500 С.
3. Єремєєв В. С. Теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник./ В.С. Єремєєв, Д. О. Сосновських, О. В. Тітова – Мелитополь: ТОВ «Видавничий будинок», 2009. – 187 с.
4. Первые шаги начинающего педагога. Сайт кафедры информатики Харьковского Национального Автодорожного Университета. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу:http://www.pervyi-shag.narod.ru.
5. Лузан П.Г.Основи науково-педагогічних досліджень./ П. Г. Лузан, І. В. Сопівник, С.В. Виговська. Національний університет біоресурсів і природокористуванняУкраїни. – Київ, 2010. – 219 С.
6. Пакет программ MATHLAB. [Электронный ресурс].- Режим доступа к ресурсу:http://www.mathworks.com/products/matlab.
7. Пакет статистического анализа данных STATISTICA 6.0. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://www.statsoft.com, http://www.statsoft.ru/home.
8. Архангельский С. И. Лекции по научной ориентации учебного процесса в высшей школе/ С. И. Архангельский. – М.: Высшая школа. 1976. – 200 С.
9. Бабанский Ю.К. Проблемы повышения эффективности педагогическихисследований: (дидактический аспект) / Ю.К. Бабанский. – М.: Педагогика. 1982. – 182 С.
10. Построение интерполяционного кубического сплайна. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://pers.narod.ru/algorithms/pas_ispline.html.

Стаття надійшла до редакції 24.03.2013.

Eremeev V. S., Kusminov V. V.
Bohdan Khmelnytsky State Pedagogical University of Melitopol

STATISTICAL ANALYSIS OF PEDAGOGICAL EXPERIMENT IN CASE AN UNKNOWN DISTRIBUTION FUNCTION

The method of statistic processing of pedagogical experiment for independent excerpts without limitation on the law of distribution of a random variable is developed. The method is based on construction of function of distribution by means of splines. In medium algorithmic language Delfi-7 the program is compiled, helping to construct integral functions of assessment and to test zero hypothesis for arbitrary level of importance. The efficiency of the method is tested by comparison with the results of analysis of the pedagogical experiment for the case of Laplas Law.

Keywords: sample data, null hypothesis, experiment, program, spline, statistical methods, significance level, distribution function.

Єремєєв В. С., Кузьмінов В. В.

Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б.Хмельницького

СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ В РАЗІ НЕВІДОМОЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

Розроблений метод статистичного аналізу педагогічного експерименту для незалежних вибірок без обмеження на закон розподілу випадкової величини. Метод заснований на побудові функції розподілу за допомогою сплайнів. У середовищі алгоритмічної мови Delfi-7 складена програма, яка дозволяє побудувати інтегральні функції розподілу і перевірити нульову гіпотезу для довільного рівня значущості. Ефективність методу перевірена шляхом порівняння з результатами аналізу педагогічного експерименту в разі нормального закону Лапласа.

Ключові слова: вибіркові дані, нульова гіпотеза, педагогічний експеримент, програма, сплайни, статистичні методи, рівень значущості, функція розподілу.