УДК 004:37

Зеленяк О.П.
НВК “Олександрійський колегіум”

СТЕРЕОМЕТРІЯ З КОМП’ЮТЕРОМ?

У статті розглянуті окремі проблеми та технології навчання геометрії із застосуванням динамічних середовищ учнів класів з поглибленим і профільним вивченням математики. Наголошено на актуальності створення комп’ютерно орієнтованих технологій і відповідних навчальних програм, проведенні системних досліджень ефективності їх застосування з урахуванням педагогічних ризиків.

Ключові слова: *середовища динамічної геометрії, моделювання, геометрична конфігурація, дослідницький підхід.*

Постановка проблеми у загальному вигляді

В галузі педагогічної науки постала актуальна проблема застосування навчальних програмних засобів. “Вивчення й обґрунтування необхідних напрямків використання ІКТ в навчальному процесі слід вважати одними з найважливіших педагогічних проблем, зокрема проблем гуманізації навчального процесу (і всієї освітньої системи) і гуманітаризації освіти. Розв’язання цих проблем є соціально-значимими завданнями педагогічної науки” [1, с. 4].

Ідеї та елементи окремих технологій комп’ютерної підтримки навчального процесу проникають у методичні системи навчання математики, зокрема, геометрії, у якій вони, на нашу думку, можуть розвиватись і втілюватись найглибше. Програми з предмету протягом тривалого часу наводять перелік тем, під час вивчення яких доцільно використовувати програмні засоби навчального призначення (GRAN, DG), бібліотеки електронних наочностей тощо. Але змушені констатувати, що консерватизм і традиції фундаментальності в освіті – стійкіші [8, 10]. Процес навчання (програми, підручники) – непорушний. Він, як і раніше, ніби принципово небажаючи змінюватись, залишається “безмашинним”. Ускладнюється проблема відсутністю комп’ютерів і ліцензійних програм для підтримки курсу математики, антиматематизацією та антифундаменталізацією шкільного курсу інформатики.

Отже, проблема полягає в тому, що елементи технологій комп’ютерної підтримки навчального процесу вкраплюються стихійно і епізодично, а комплексні фундаментальні дослідження запізнюються.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Проблеми, пов’язані з розробкою й упровадженням середовищ динамічної геометрії (СДГ) у шкільний навчальний процес, тенденції їх розвитку досліджувалися в роботах Є.Ф. Вінниченка, Ю.В. Горошка, В.П. Гороха, Л.В. Грамбовської, М.І. Жалдака, О.П. Зеленяка, С.А. Ракова та інших.

“Упровадженню ІКТ у процес вивчення математики в Україні, починаючи з середини 90-х років минулого сторіччя, приділялась значна увага. Результатом чого стала розробка таких інноваційних засобів, як Gran1W, Gran2D, Gran3D, DG та відповідного науково-методичного забезпечення. Проте, з багатьох причин, використання навчальних програм у загальноосвітніх навчальних закладах не набуло системного характеру. Недостатня увага приділяється впровадженню у навчальний процес систем динамічної математики, розроблених в інших країнах. Переважна більшість учителів ЗНЗ з ними просто не знайомі” [7].

Констатуємо, що й нині науково-методичне і, особливо, дидактичне забезпечення для вивчення певних тем курсу шкільної математики з використанням СДГ ще не створене. Потребують вирішення питання використання середовищ, розроблених в інших країнах (GeoGebra, Cabri, Geometer's Sketchpad). Міжнародний проект з відкритим кодом GeoGebra

[7] має потужні функціональні можливості і є вільним програмним продуктом, а Geometer's Sketchpad, Cabri 3D – комерційні. Останній, на наш погляд, потрібно локалізувати для шкіл.

Звернемо увагу на суттєву думку, що збігається з нашою точкою зору на сучасний стан практичної реалізації проблеми. "Аналіз літератури показує поширення дисертаційно-декларативних висловлень про те, що використання засобів ІКТ в освіті "поліпшує", "забезпечує підвищення", "надає можливість" і т. ін. Це пояснюється превалюванням у дослідженнях позитивних результатів використання ІКТ у навчальному процесі, коротко-строковістю досліджень і впливом сформованості в широких колах освітян "позитивістського" підходу до трактування результатів впровадження ІКТ, що досягають сьогодні міфологічного рівня … Число публікацій, у яких доводиться, що "комп'ютери забезпечують індивідуалізацію навчання", а застосування навчальних програм дає тільки позитивні результати перевищує всі розумні межі" [3, с. 4].

Таким чином, наголошуємо на відсутності системних довгострокових досліджень, необхідності їх термінової організації з вивченням функціональних можливостей середовищ і доцільності локалізації та педагогічних ризиків, супутних при роботі учнів у штучних середовищах. Автори низки робіт відсутність досліджень пояснюють процесом реформування сучасної математичної освіти держави. Мабуть, локомотивами саме цих реформ стали останні з'їзди вчителів математики і вчителів інформатики. У шкільній математиці швидше відбувається процес некерованих змін з невизначеним результатом: недостатня кількість годин на вивчення предмета, "калейдоскоп" недосконалих підручників, неприпустиме спрощення матеріалу і критеріїв оцінювання (орієнтація на тести і ЗНО), падіння професіоналізму вчителів, повсюдне завищення оцінок тощо.

"Для створення і розробки комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання потрібні значні затрати зусиль і часу методистів-предметників… Сподівання ж на те, що вчителі самі створять комп'ютерно-орієнтовані системи навчання своїх предметів, видаються наївними, утопічними і безпідставними" [1, с.7].

"Потребують подальших досліджень проблеми комплексного оцінювання методичних систем та інформаційно-комунікаційних технологій навчання з уточненням зовнішніх і внутрішніх критеріїв і показників якості" [4, с.7].

Короткий аналіз публікацій завершимо думками видатних вчених, які переконують в доцільності застосування комп'ютерів у наукових дослідженнях та зростаючому впливу на них.

Абелівський лауреат М. Громов звертає увагу на широкий клас задач, що приходять з експериментальних наук (біологія, геофізика, медицина і т.д.), де доводиться мати справу із великою кількістю вільно структурованих даних. Він вважає, що для досягнення прогресу в розв'язанні таких задач необхідні радикальні теоретичні ідеї, так само, як і нові шляхи поєднання математики з комп'ютерами. "На даний момент ми, математики, часто маємо незначне уявлення про те, що робиться в науці і техніці, у той час, як вчені, експериментатори та інженери в багатьох випадках не підозрюють про ті можливості, які дає прогрес чистої математики. Ця жахлива незбалансованість повинна ліквідовуватись привнесенням інших наук у підготовку математиків і викладанням чистої математики вченим та інженерам. Для цього знадобиться новий навчальний план ...".

В. Садовничий зауважує, що "питання обчислень відігравали в математиці підпорядковану роль. Але тепер вони отримали суттєве, у ряді випадків вирішальне значення... З появою комп'ютерів світ математики, безперечно, став змінюватися. Змінюються не лише математичне мислення, математичні методи, але й науковий світогляд у цілому".

Ф. Броудер прогнозує: "Одним з основних зовнішніх впливів на математику є, звичайно, вплив комп'ютерної науки. Все, що пов'язане з цією областю, буде являти центральне значення для математики на протязі майбутнього століття або всього розвитку нашої цивілізації на її сучасній траєкторії – що означає стільки, скільки вона існуватиме!".

Виклад основного матеріалу

Метою даної статті є розгляд окремих проблем і технологій навчання стереометрії учнів профільних класів та класів з поглибленим вивченням математики із застосуванням середовищ динамічної геометрії.

Традиції фундаментальності, поєднання науковості та доступності навчання – одна із основних проблем побудови шкільного курсу математики. Багато наукових відкриттів зроблені видатними вченими без строгого обґрунтування. Враховуючи такий досвід і психологію творчої діяльності, професор М.Клайн (слідом за М.В.Остроградським, М.І.Лобачевським, В.А.Стєкловим) різко критикує прагнення викладача бути "цілком дедуктивним" у процесі навчання математики. Він вважає, що доведення повинні з'являтися поступово, а рівень строгості відповідати рівню математичного розвитку та "математичного віку" того, кого навчають. На думку видатного математика і педагога О.Я.Хінчина, "аксіоматична побудова шкільного курсу геометрії є однією з найважливіших причин формалізму в знаннях учнів, тому що вона запроваджується у віці, коли в учнів ще немає потреби у строгому логічному доведенні".

Аналогічні думки висловлювали А.Пуанкаре, Р.Курант, Г.Вейль, К.Гаус. Видатні французькі математики Ж.Адамар, А.Картан, М.Фреше, обговорюючи питання основ шкільної математики, зауважували: "Якщо аксіоматичний метод чудовий для професійних математиків, то з педагогічної точки зору він не годиться... прагнення привести розум учнів у контакт із сучасною математичною думкою є занадто честолюбивою програмою". О.М.Крилов, який поєднував широкі математичні пізнання з блискучим умінням застосовувати їх до розв'язування технічних проблем, вважав за необхідне у викладі курсу математики трохи поступитись у вимогах бездоганної строгості. В.М.Тихомиров, заперечуючи А.Пуанкаре, писав, що "... тренувати мислення можна лише на конкретних задачах, а не на "загальних принципах"... Але безсумнівно й те, що треба навчати розумінню сутності речей, загальним принципам та законам – і в природознавстві й у житті". А.П.Єршов, констатуючи збільшення дистанції між математикою, як шкільним предметом, і математикою, як живою наукою, поставив ряд глобальних запитань: елітарна чи егалітарна освіта, варіативність чи однаковість, у бік вищого навчального закладу чи у бік загального знання, традиція чи модернізація?

Курс геометрії вирізняється стійким змістом і гуманітарною спрямованістю. Він надає великі можливості для розвитку творчих здібностей учнів. Відомий російський геометр-методист І.Ф. Шаригін писав: "*Сегодня геометрия является одним из немногих экологически чистых продуктов, потребляемых в образовании*".

Моделі планіметричних динамічних конфігурацій ми досліджували на прикладі вписано-описаної рівнобічної трапеції [11,12]. Створена серія авторських міжпредметних задач демонструє ефективне застосування комп'ютера на уроках інформатики та математики. Дослідження і розв'язування цих задач вимагає дослідницького підходу і знайомить старшокласників з інтегрованим застосуванням інформатики, геометрії, математичного аналізу.

Моделювання стереометричних динамічних конфігурацій розглянуто в роботах [13,14]. Зупинимось на деяких аспектах навчального моделювання.

Навіть у давнину практична діяльність людини спонукала її досліджувати просторові форми. Сучасний етап впровадження систем автоматизованого проектування характеризується підвищеним інтересом до об'ємного моделювання. Комп'ютери суттєво розширили можливості обчислень за методами аналітичної і диференціальної геометрії. "Електронні кульмани" сьогодні у всіх конструкторських бюро, геометрія сучасних виробів вражає. Робота в просторі вимагає не лише традиційно креслярських навичок. В інженерній практиці відомий метод декомпозиції: виріб представляється як система агрегатів, що складаються з вузлів, а ті, в свою чергу, з детелей. В об'ємному моделюванні вищі моделі, як правило, включають деталізовані нижчі, а складність формалізації усіх зв'язків у параметричних моделях вимагає пошуку асоціацій.

З огляду на те, що у стереометрії "конфігураційне" мислення і пошук асоціацій надважливі, вважаємо, що сучасні програми навчання стереометрії повинні знайомити учнів з геометричним моделюванням, навчаючи його навичкам, формалізації і деталізації. Видатний математик-педагог Шварцбурд С.І. у математичному розвитку школяра виділив розвиток просторової уяви як одну із головних складових.

Чи відомий нині методистам і науковцям реальний рівень навчальних досягнень випускників з геометрії? Учителі математики на кожному уроці упевнюються у "навчальній безпорадності" старшокласників при розв'язуванні стереометричних задач. Адже окрім знання означень, теорем і формул їм необхідно володіти "чисто стереометричними" уміннями і навичками. І перш за все – просторовою уявою. Важливо зрозуміти, що розвивати її лише за допомогою таблиць, кодопозитивів, зошитів із статичними малюнками, наборів штампів, фізичних моделей геометричних тіл, стереометричних ящиків – учорашній день, за допомогою інтерактивних СДГ і моделювання геометричних конфігурацій з елементами дослідницької діяльності – сьогоднішній день.

Наш двадцятирічний практичний досвід застосування комп'ютера на уроках математики, наукові дослідження з проблеми реалізації міжпредметних зв'язків математики та інформатики і результати педагогічної практики (більше двадцяти випускників мають наукові ступені) переконують, що СДГ разом з відповідною підготовкою вчителів у галузі ІКТ, педагогіки і психології здатні суттєво змінити і покращити технології й результати навчання геометрії. Моделювання ефективно поєднувати з програмуванням, знайомлячи учнів з реалізацією окремих функцій спеціалізованих середовищ [9, 12]. Це забезпечує неізольоване вивчення розділу "Алгоритмізація і програмування" і не "створює відчуженості учня від процесів, які відбуваються в програмному середовищі комп'ютера … не спотворює уявлення щодо властивостей явища, яке ним візуально сприймається з екрана комп'ютера" [3, с.5].

В.І. Арнольд зазначає: "Мягкое моделирование требует гармоничной работы обоих полушарий мозга... Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастию, системой. Выросли целые поколения профессиональных математиков и преподавателей математики, умеющих только это и не представляющих себе возможности какого-либо другого преподавания математики".

"Меньше схоластики, меньше формализма, меньше жестких моделей, меньше опоры на левое полушарие мозга! Больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше мягких моделей, больше опоры на правое полушарие мозга" [5].

Нарешті, й у чинній програмі з математики зазначено: "Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення. Широке і системне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення курсу математики може стати потужним засобом формування в учнів навички повсякденного користування математикою при вивченні природничих предметів".

Підтримку навчання стереометрії у поглиблених і профільних класах ми здійснюємо за допомогою СДГ **Gran 3D** (Україна) [2], **Cabri 3D** (Франція).

Cabri 3D (www.cabri.com) – світовий лідер серед пакетів динамічної стереометрії. У Росії він локалізований Інститутом нових технологій (http://www.int-edu.ru), посібник користувача має назву "Интерактивная геометрия Cabri 3D".

Середовище можна використовувати як потужний інструментальний засіб для підготовки електронних уроків, лекцій та книг з динамічними прикладами, які учень може досліджувати. Але основне його призначення – конструювання моделей у віртуальному просторі – результаті паралельного (центрального) проектування частини тривимірного евклідового простору на площину екрана, що сприймається як тривимірне.

Алгоритми побудов – повчальні і цікаві для учнів. Віртуальні лінійка (відрізок, промінь, пряма) і циркулі (у фіксованій площині – коло, у просторі – сфера) дозволяють застосовувати всі класичні алгоритми задач на побудову.

Виконувані побудови – складова частина розв’язування стереометричної задачі. Традиційно за допомогою методів паралельного проектування вони зводяться до плоского малюнка на площині, що відображає один ракурс зображення просторового геометричного тіла. У разі необхідності його зміна потребує додаткового часу на уроці і тому рідко виконується. Виготовити фізичну тривимірну модель до кожної стереометричної задачі також неможливо. Окрім того, статичні моделі мають обмеження. Не дозволяючи варіювати параметри, вони не сприяють глибоким дослідженням, які найкраще проводити у динаміці. Динамічні малюнки, які легко і миттєво змінюються, дозволяють створювати середовища динамічної геометрії, інтерактивного моделювання у віртульному просторі, просторового конструювання. Кожний малюнок у такому середовищі є фактично нескінченною множиною малюнків. Учень може зафіксувати той один, на якому він уявляє дану конфігурацію найкраще.

Таким чином, роль малюнка суттєво зростає, оскільки він стає не лише ілюстрацією у процесі розв’язування, а його важливою частиною. Доповнені динамічними моделями багато стереометричних задач, по-перше, можна розв’язувати надзвичайно швидко з “магічними швидкістю, точністю, виразністю, динамічністю, інтелектуальністю” (Раков С.А.), по-друге, можна глибоко досліджувати.

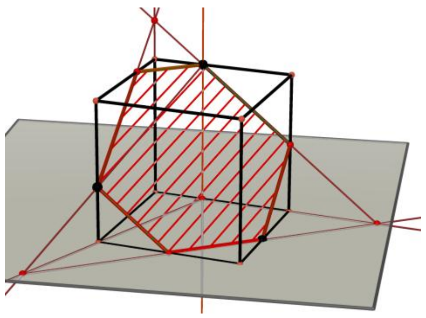
“Застосування відповідних програмних засобів перетворює окремі розділи і методи математики в “математику для всіх”, що стають доступними … той хто розв’язує задачу стає користувачем математичних методів, можливо, не володіючи їх будовою і обгрунтуванням, аналогічно до того, як він використовує інші комп’ютерні програми…, не знаючи як і за якими принципами вони побудовані…” [2, с.4].

Систематичне використання СДГ та інших програмних засобів навчального призначення навчить учня застосовувати їх в подальшому навчанні у вищому навчальному закладі, розширить його математичний кругозір, знайомлячи з методами дослідження у відповідній галузі науки. “Провідним принципом, який визначає структру навчання математики за математичним та фізико-математичним профілями, є моделювання у навчальному процесі елементів діяльності фахівця-математика” зазначається у програмі з математики.

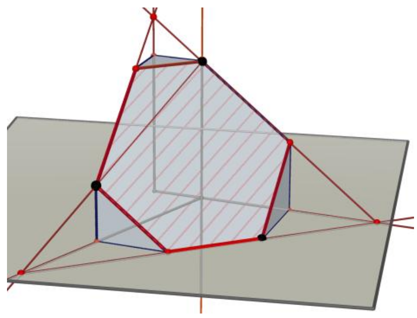
Розглянемо деякі практично значимі аспекти застосування СДГ Cabri 3D.

1. *Побудова перерізів*

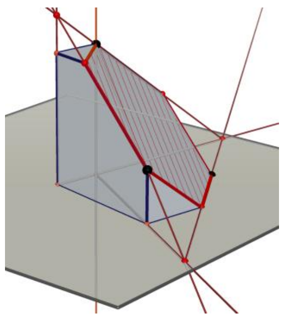
Ця тема – одна із найсприятливіших для вступу до моделювання. З побудови зображень многогранників та їх перерізів радимо розпочинати знайомство з середовищем динамічної стереометрії. Мал. 1-3 ілюструють відому задачу побудови переріза куба площиною, яка проходить через три точки, шо належать попарно мимобіжним ребрам.



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

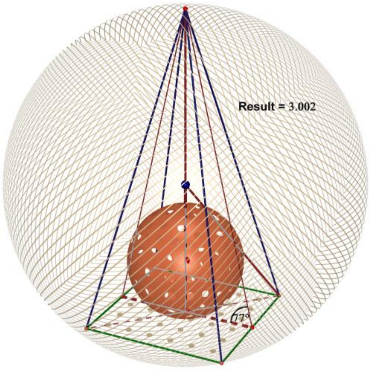
Cabri 3D дозволяє виконувати реальні перерізи (мал. 2-3) многогранників площиною (*Cut Polyhedron*), довільно маніпулювати многогранником (*Manipulation*), виконувати анімацію (*Animation*), автоматично і покроково відтворювати побудови (*Replay Construction*), додавати різні проекції для перегляду (*Document / Add View / Front (Left, Top…)*), відтворювати динамічні малюнки в Microsoft Word тощо.

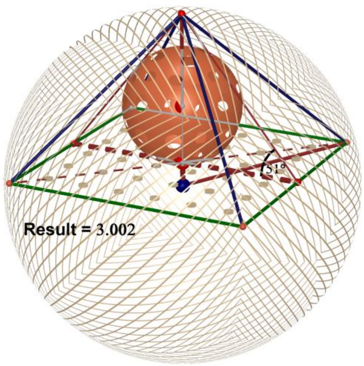
2. <u>*Моделювання конфігурацій*</u>

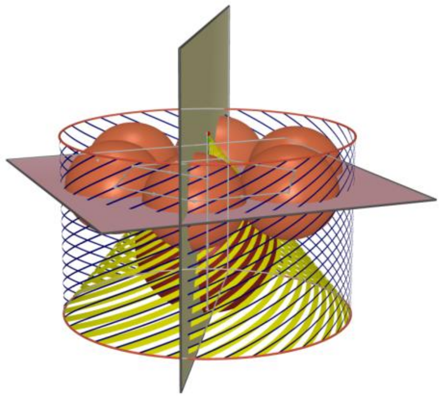
Моделювання може розглядатись як ілюстративне, як окремий вид навчальної діяльності або поєднуватися з процесом розв’язування задачі [13]. Як правило, *статичні* моделі створюються тоді, коли вони потрібні точні або з точністю до подібності для того, щоб виконувати вимірювання. *Динамічні і комбіновані* моделі (деякі точки моделі залежні, а деякі – незалежні) створюються для подальших досліджень, варіювання параметрів.

Моделі-ілюстрації доцільно використовувати для демонстрації декількох розв’язків однієї задачі, складних багатофігурних комбінацій тощо.

Задача 1. Знайти двогранний кут α при основі правильної чотирикутної піраміди, якщо радіус описаної навколо піраміди кулі у три рази більший радіуса вписаної в неї кулі.







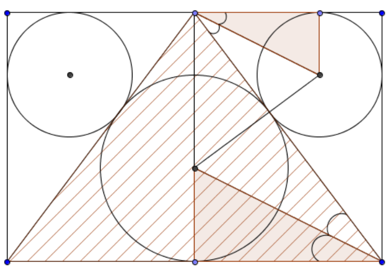
Мал. 4 *Мал. 5* *Мал. 6*

Рухаючи незалежну вершину піраміди (мал. 4-5), спостерігаємо за значеннями даного відношення *a* і шуканого лінійного кута. Бачимо, що *a* двічі набуває значення 3. Отже, існують два розв’язки цієї задачі. У другому випадку (мал. 5) центр описаної кулі лежить поза пірамідою.

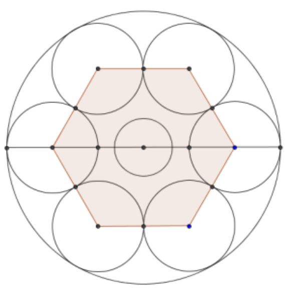
Подібні моделі можна демонструвати (виконувати) перед розв’язуванням з метою вивчення конфігурації і пошуку способу розв’язування, а також подальшої перевірки відповіді. Після одержання відповіді цікаво створити точну модель. Взагалі, спектр моделей, з точку зору технологій їх застосування, дуже широкий. Обрати тип допоможе практика застосування динамічних малюнків.

Задача 2. Конус і циліндр мають спільну основу і спільну висоту. Усередині циліндра, але поза конусом, розміщені шість рівних сфер, кожна з яких дотикається верхньої основи і бічної поверхні циліндра, двох сусідніх сфер і бічної поверхні конуса. Радіус кожної сфери дорівнює r. Знайти радіус сфери, вписаної у конус.

При розв’язуванні багатьох задач на тіла обертання обмежуються планіметричним малюнком – осьовим перерізом (мал. 7). У даній задачі потрібно розглядати ще один переріз конфігурації площиною, яка перпендикулярна до осьового перерізу і проходить через центри шести даних сфер (мал. 8).



Мал. 7



Мал. 8

Просторова уява звертається саме до цього перерізу як до ключа розв’язування і моделювання. Виходить два концентричних круга, усередині більшого з яких 6 рівних кіл з центрами у вершинах правильного шестикутника. Менший круг – переріз конуса площиною, паралельною до основи. Діаметр кожної з 6 сфер дорівнює стороні правильного шестикутника або $2r$, а діаметр спільної основи циліндра і конуса дорівнює його потроєній стороні або $6r$.

В осьовому перерізі важливо виділити даний відрізок, відрізки, виражені через даний у процесі дослідження попереднього перерізу і, звичайно, шуканий відрізок. При детальнішому дослідженні виявляться бісектриси і рівні кути, подібні прямокутні трикутники тощо. Після моделювання розв’язування задачі неочікувано просте для багатофігурної конфігурації.

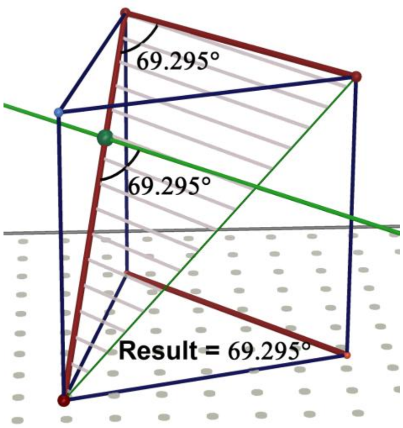
3. *Вимірювання у просторі*

У програмі з математики зазначено: “Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу зображує геометричні фігури, встановлює і обгрунтовує їхні властивості, застосовує властивості фігур при розв’язуванні задач: вимірює геометричні величини, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходить кількісні характеристики фігур (площі, об’єми)”.

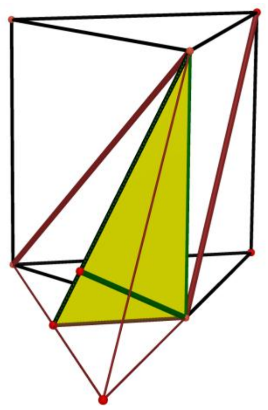
Зауважимо, що: а) при традиційному “безмашинному” навчанні стереометрії вказані уміння взагалі не відпрацьовуються, практичні роботи не передбачені програмою; б) Cabri 3D – потужний і високоточний розв’язувач задач на вимірювання.

Задача 3. Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює стороні основи. Знайти величину кута між стороною основи і діагоналлю бічної грані, яка цю сторону не перетинає.

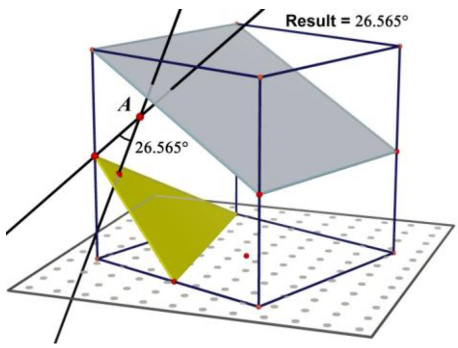
Для розв’язання задачі досить побудувати модель і виконати вимірювання величини кута (мал. 9). При цьому можна вибрати довільну точку на діагоналі, провести через неї паралельну пряму до прямої, що містить сторону основи і виміряти величину утвореного кута з вершиною у цій точці.



Мал. 9



Мал. 10



Мал. 11

Задача 4. Знайти відстань між мимобіжними діагоналями бічних граней прямої трикутної призми, усі ребра якої мають довжину a.

Виділимо прямокутний трикутник з катетами a і $a/2$ (мал. 10). Шукана відстань – його висота, опущена на гіпотенузу. Маємо: $a \cdot a/2 : (a\sqrt{5}/2) = a : \sqrt{5}$.

Вимірюємо величини a та x, де x – шукана відстань. Результат – відношення $a : x$.

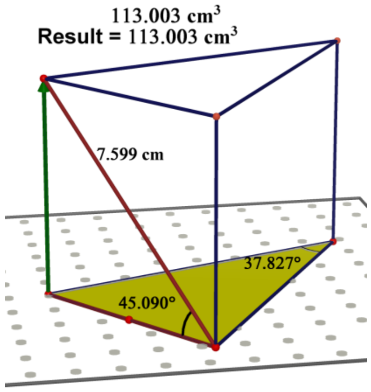
Задача 5. Знайти величину кута між площинами, виділеними на малюнку (всі вершини трикутника і прямокутника є або вершинами куба або серединами його ребер).

Кут між площинами дорівнює куту між перпендикулярними прямими, проведеними до цих площин. Вимірюємо величину кута з вершиною A (мал. 11), що утворився при перетині вказаних прямих.

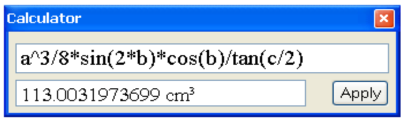
4. <u>*Перевірка відповідей*</u>

Задача 6. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ бічної грані, протилежної цьому куту, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайти об’єм призми.

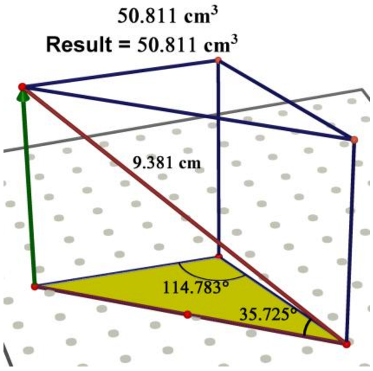
Вираз-відповідь $\frac{l^3}{8}\sin 2\beta \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ залежить від трьох параметрів.



Мал. 12



Мал. 13



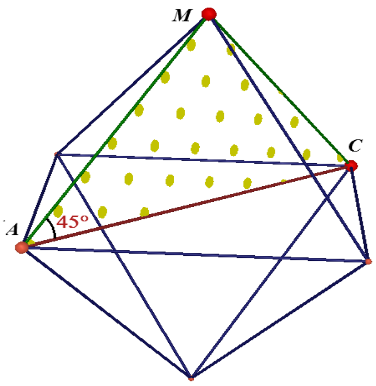
Мал. 14

Щоб перевірити одержану відповідь за допомогою створеної динамічної моделі, достатньо виміряти величину об’єма призми засобами СДГ (мал. 12, мал. 14) і порівняти її з величиною, обчисленою за формулою-відповіддю за допомогою вбудованого калькулятора (мал. 13). Зрозуміло, що ці величини з великою точністю повинні співпадати.

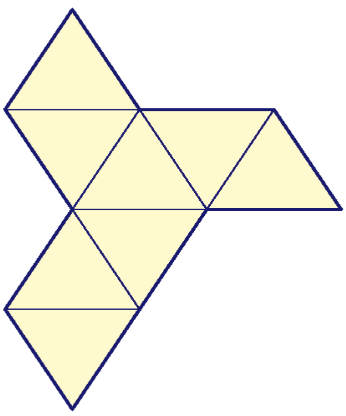
5. <u>*Конфігурації–каркаси*</u>

Задача 7. Пряма утворює з сторонами прямого кута кути по 60°. Знайти величину кута між цією прямою і площиною прямого кута.

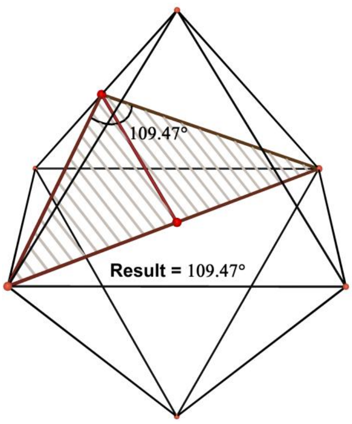
Допоміжна фігура-каркас існує неявно – правильний октаедр [14]. Це геометричне тіло містить конфігурацію, яка визначається вихідними даними задачі. Будуємо правильний октаедр (*Regular Octahedron*). Вимірюючи шуканий кут *MAC* (*Angle*), одержуємо величину кута 45° (мал. 15).



Мал. 15



Мал. 16



Мал. 17

У Cabri 3D правильні многогранники – базові об’єкти. При необхідності їх можна швидко будувати, масштабувати, додавати розгортки (*Open Polyhedron, Add Net Page*).

За допомогою останніх (мал. 16) зручно виготовляти фізичні моделі правильних многогранників.

Задача 8. Знайти косинус кута між суміжними гранями правильної чотирикутної піраміди, у якої бічне ребро дорівнює стороні основи.

Скористаємось ще раз правильним октаедром як допоміжною фігурою-каркасом. Будуємо середину його бічного ребра (*Midpoint*), відрізки (*Segment*), які належать сторонам кута і вимірюємо шуканий кут (*Angle*) (мал. 17).

Відомо, що міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута. Тому на ребрі октаедра можна обрати довільно незалежну точку, вершину лінійного кута, і через неї побудувати площину, перпендикулярну до бічного ребра. Таким чином, наочно відпрацьовується означення і основна властивість міри лінійного кута.

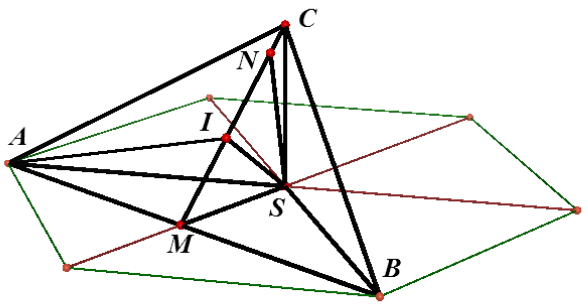
Задача 9. Три рівних конуси мають спільну вершину, дотикаються однієї площини і попарно дотикаються між собою. Знайти кут в осьовому перерізі одного з цих конусів.

Побудова підходящої конфігурації у цій складній задачі вимагає розвиненої просторової уяви.

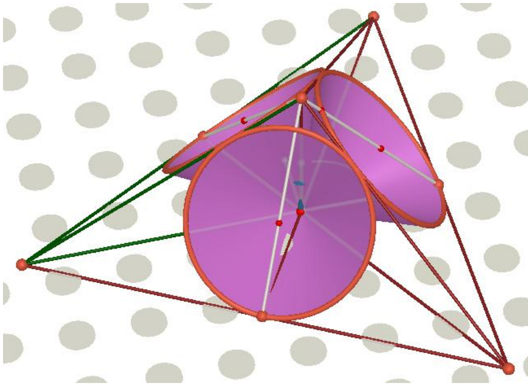
Розглянемо піраміду $SABC$, у якої $CS \perp (ASB)$, $\angle ASB = 120°$, $AS = SB$ (мал. 18).

Тоді $\angle ASC = \angle BSC = 90°$, $AC = CB$. Нехай $SI \perp (ABC)$, тобто основа висоти піраміди збігається з центром I кола, вписаного в трикутник ABC. Тоді у піраміду $SABC$ можна вписати прямий круговий конус з вершиною S, висотою SI і осьовим перерізом SMN (M – середина AB, $MI = NI$, $N \in CM$). Отже, піраміда - допоміжний каркас для конуса.

Побудувавши три таких піраміди зі спільним ребром CS, утворимо повну конфігурацію-каркас для даних конусів із спільною вершиною S. $\angle MSN$ – шуканий (мал. 19).



Мал. 18



Мал. 19

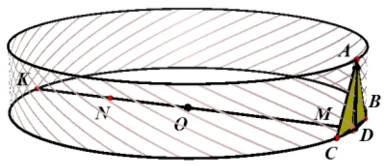
В СДГ доцільно розглядати дві різні моделі – наближену (демонстраційну), щоб використовувати її для пошуку способу розв'язування і точну, яку можна створювати вже після отримання відповіді.

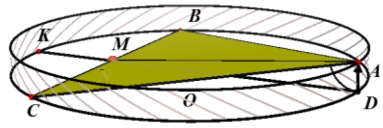
6. Створення нових задач

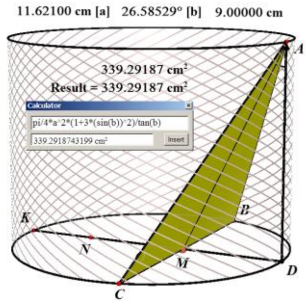
Задача 10. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює a. Дві його вершини лежать на колі однієї основи циліндра, а третя – на колі іншої основи. Площина трикутника утворює з твірною циліндра кут α. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

Задача №12.269 із популярного збірника задач під редакцією М.І. Сканаві є типовою на застосування тригонометрії. Як відомо, стереометричні конфігурації – це джерела функціональних залежностей. Вивчення останніх у процесі дослідження відповідних моделей дозволяє створювати якісно нові цікаві екстремальні задачі.

Вираз-відповідь $S(a, \alpha) = \frac{\pi}{4} a^2 (1 + 3 \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$ - функція від двох змінних. Зафіксувавши радіус основи, можна розглядати функцію від однієї незалежної змінної.







Мал. 20 *Мал. 21* *Мал. 22*

Дійсно, від величини радіуса основи циліндра залежить величина сторони *a* правильного трикутника, невертикальне положення якого всередині циліндра визначає довжину твірної. Спостерігаючи за довжиною твірної циліндра при русі точки *M* по радіусові *OD*, помічаємо, що вона, а, отже, і площа бічної поверхні набувають найбільшого значення. У якому відношенні при цьому точка *M* поділяє вказаний радіус, які значення набувають *a*, α і площа бічної поверхні циліндра?

Таким чином, одержано нову задачу на знаходження найбільшого значення функції.

Екстремальна задача. Дві вершини рівностороннього трикутника лежать на колі однієї основи циліндра фіксованого радіуса *R*, де *R* – довільна стала, а третя – на колі іншої основи. Знайти найбільше значення площі бічної поверхні циліндра.

7. *Можливості і продуктивні підходи*

CABRI® 3D Interactive Geometry GRAN-3D

Для учня	*Для вчителя*
Розвиток просторової уяви, образного мислення, посилення інтелектуальної діяльності	Підвищення продуктивності уроку, інтенсифікація навчальної діяльності
Динамізація об'єктів, цілісне неперервне сприйняття просторової конфігурації	Зв'язок алгебри і геометрії: реальні функціональні залежності, координати, рівняння, геометричні перетворення
Автоматизація побудов і обчислень. Велика швидкість, потужність і точність обчислень	Моделювання складних просторових багатофігурних конфігурацій, створення нових задач
Перевірка розв'язків задач, чисельні експерименти, інтерпретація результатів	Складання серій тестів, задач для самостійних і контрольних робіт
Алгебра у стереометрії: функціональні залежності, координати, рівняння (прямих, площин, сфери тощо), геометричні перетворення	Прикладна спрямованість уроку, теми, курсу. Удосконалення форм навчальної роботи: сприяння індивідуалізації та диференціації
Експериментальна перевірка гіпотез, конструювання контрприкладів, пошук нестандартних підходів до розв'язування	Організація самостійної творчої роботи учнів на уроці і вдома
"Математика для всіх" – розв'язування багатьох задач без знання відповідного аналітичного апарату та методів	Освітнє середовище з елементами навчально-дослідницької діяльності наближення до методології відповідної галузі науки

Висновки

1. На часі створення комп’ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математики, системні довгострокові дослідження середовищ динамічної геометрії, вивчення їх функціональних можливостей та супутних педагогічних ризиків.
2. Для молодших школярів СДГ можуть сприяти побудові якісно нових, електронних, пропедевтичних курсів геометрії, для старших – удосконаленню способів розв’язування, розв’язуванню задач прикладного характеру, створенню та дослідженню відповідних математичних моделей.
3. В сучасних методичних системах навчання математики за умов урахування основних психолого-педагогічних принципів комп’ютерні програми повинні стати для учня інтелектуальним знаряддям.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Жалдак М.І. Використання комп’ютера в навчальному процесі має бути педагогічно виваженим і доцільним // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 2011. – №3. – С.3-12.
2. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф.. Математика з комп’ютером. Посібник для вчителів. – К. – 2009. – 280 с.
3. Жук Ю.О. Діалектика педагогічного знання в умовах комп’ютерно орієнтованого процесу навчання // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 2011. – №4. – С.3-6.
4. Спірін О.М. Критерії і показники якості інформаційно-комунікаційних технологій навчання // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2013. – №1 (33). Режим доступу до журналу: http://journal.iitta.gov.ua
5. Саранцев Г.И. Методические основы школьного учебника математики // Педагогика. – 2003. – №10.
6. Грамбовська Л.В., Яковчук О.М. Комп’ютерні динамічні моделі як засіб дидактичного забезпечення процесу навчання геометрії в сучасній школі // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 2010. – №7. – С.14-17.
7. Ракута В.М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2012. – №4 (30). Режим доступу до журналу: http://journal.iitta.gov.ua
8. Зеленяк О.П. Інтегровані уроки з математики та інформатики в класах з поглибленим вивченням цих предметів // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 2006. – №4. – С.16-18.
9. Зеленяк О.П. Компьютерное моделирование в геометрии // Информатика и образование. – 2007. – №5. – С.40-50. – №6. – С.114-119. – №7. – С.47-55.
10. Зеленяк О.П. Сучасна шкільна інформатика: чи є вона такою? // Комп’ютер у школі
11. та сім’ї. – 2010. – №5. – С.35-38.
12. Зеленяк О.П. Динамічна геометрична конфігурація // Математика в сучасній школі. – К.: – 2012. – №9. – С.22-28.
13. Зеленяк О.П. Моделювання динамічної геометричної конфігурації // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 2012. – №4. – С.33-40.
14. Зеленяк О.П. Розв’язування стереометричних задач: плюс моделювання // Математика в школах України. – 2012. – №34-36 (370-372). – С. 10-23.
15. Зеленяк О.П. Розв’язування стереометричних задач: допоміжна конфігурація // Математика в школах України. – 2012. – №34-36 (370-372). – С. 24-34.

Стаття надійшла до редакції 15.03.2013.

Zeleniak O.P.
Educational Complex "Alexandria Collegium"

GEOMETRY WITH A COMPUTER?

The paper considers some problems and technologies of teaching geometry using dynamic geometry environments to students of advanced classes and specialized study of mathematics. The author emphasizes the urgency of creating computer-oriented technologies and related training programs and system research of the effectiveness of their application considering educational risks.

Keywords: Environment of dynamic geometry, modeling, geometric configuration, the research approach.

Зеленяк О.П.
НВК “Александрийский коллегиум”

СТЕРЕОМЕТРИЯ С КОМПЬЮТЕРОМ?

В статье рассмотрены отдельные проблемы и технологии обучения геометрии с использованием сред динамической геометрии учащихся классов с углубленным и профильным изучением математики. Отмечается актуальность создания компьютерно ориентированных технологий и соответствующих учебных программ, проведения системных исследований эффективности их применения с учетом педагогических рисков.

Ключевые слова: среда динамической геометрии, моделирование, геометрическая конфигурация, исследовательский подход.