УДК 517.946

МЕТОД КРАТНОГО ПЕРЕРАХУНКУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вейцбліт О.Й.

Херсонський державний університет

У роботі для аналізу результатів інтегрування диференціальних рівнянь пропонується апостеріорний метод кратного перерахунку, який є узагальненням методу подвійного перерахунку Рунге – Річардсона.

Ключові слова: *чисельний, метод, алгоритм, диференціальний, інтегрування.*

Постановка задачі

Курс методів обчислень, у якому програми були б лише ілюстрацією та застосуванням теоретичних досліджень, створював би дуже скривлену панораму цієї дисципліни. Часто обчислювальний експеримент насправді грає провідну роль у створенні математичної моделі та чисельних методів, апостеріорні методи аналізу результатів обчислень, як правило, значно точніші та поширеніші апріорних методів [1]. Природно, щоб саме ці методи аналізу відігравали провідну роль також і у викладанні чисельних методів.

У цій роботі пропонується апостеріорний метод кратного перерахунку для аналізу результатів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь методами Рунге – Кутта, який зручно використовувати при викладанні курсу методів обчислень. Ця робота є безпосереднім продовженням і розвитком [2], де метод кратного перерахунку розглядався для випадку інтегрування функцій. Отже, і для диференціальних рівнянь цей метод в кінцевому рахунку є узагальненням методу подвійного перерахунку Рунге – Річардсона. Застосування кратного перерахунку до диференціальних рівнянь мало відрізняється від його застосування до інтегрування функцій, що є дуже зручним при викладанні. Його простота та відкритість прислуговує легкості модифікації алгоритмів, а разом з потужним графічним інтерфейсом – аналізу результатів, який іноді здатен перетворюватися у “математику в малюнках” [3], [4]. Проте, доведення методу у випадку диференціальних рівнянь значно ускладнюється в порівнянні з інтегруванням функцій.

Методи подвійного та кратного перерахунку для диференціальних рівнянь

Означення 1. 1. Розв’язати задачу Коші

$$y' = f(x, y); \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

чисельно означає для заданої послідовності $x_0, x_1, \dots, x_n$ значень незалежної змінної x і числа y_0 знайти числову послідовність $y_0, y_1, \dots, y_n$ так, щоб y_k з заданою точністю наближав $y(x_k)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$, де $y(x)$ – єдиний розв’язок задачі Коші з початковою умовою $y(x_0) = y_0$.

2. Різницю $y_k - y(x_k)$ називають *похибкою наближеного значення* y_k *в точці* x_k.

3. Якщо всі точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ рівновіддалені: $x_k = x_0 + kh$, то величину h називають *кроком інтегрування* диференціального рівняння.

Нехай $\varphi_k(h) = y_k - y(x_k)$ – це похибка наближеного значення y_k в точці x_k для розв’язку $y(x)$ задачі Коші (1) даним методом інтегрування ($k = 1, 2, \dots, n$). Тоді

Означення 2. *Порядок точності* методу інтегрування [5] диференціального рівняння відносно його кроку h дорівнює натуральному числу s, якщо

$$ch^{s+1} \le |\varphi_k(h)| \le Ch^{s+1} \tag{2}$$

для всіх $k = 1, 2, \dots, n$ і всіх достатньо малих h при деяких сталих $C, c > 0$.

Збіжність методу буде тим швидшою, чим більшим є порядок його точності. Так порядок точності методу Ейлера дорівнює одиниці, а порядок точності удосконаленого методу Ейлера дорівнює двом. Нагадаємо також, що

Означення 3. *Методи Рунге – Кутта другого порядку точності* визначаються рекурентними формулами

$$y_{k+1} = y_k + p_1 h f(x_k, y_k) + p_2 h f(\bar{x}_k, \bar{y}_k), \qquad (3)$$

де

$$\bar{x}_k = x_k + \alpha_2 h, \qquad \bar{y}_k = y_k + \beta_{21} h f(x_k, y_k), \qquad (4)$$

за умови, що чотири параметри: $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ зв'язані системою алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ p_2 \cdot \alpha_2 = \dfrac{1}{2} \\ p_2 \cdot \beta_{21} = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (5).$$

Тут очевидно, що $p_2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_{21} \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_{21}$. Тепер застосуємо апостеріорні (тобто отримані після і в результаті розрахунків) методи оцінки похибок чисельних наближень y_k до точних значень розв'язків $y(x_k)$ в заданих точках x_k.

Нехай задані послідовність $x_0, x_1, \ldots, x_n$ рівновіддалених точок ($x_k = x_0 + kh$) з кроком інтегрування диференціального рівняння h, задача Коші $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ та її чисельний розв'язок $y_0, y_1, \ldots, y_n$ у заданих точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, отриманий деяким методом порядку точності s.

Нехай ще задані послідовність точок $\breve{x}_0, \breve{x}_1, \ldots, \breve{x}_{2n}$ з кроком $h/2$ так, що $\breve{x}_{2k} = x_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$), та ж задача Коші (1) $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ та її чисельний розв'язок $\breve{y}_0, \breve{y}_1, \ldots, \breve{y}_{2n}$ у заданих точках $\breve{x}_0, \breve{x}_1, \ldots, \breve{x}_{2n}$, отриманий тим самим методом порядку точності s.

Метод подвійного перерахунку для диференціальних рівнянь отримується узагальненням такого методу для інтегрування функцій і ґрунтується на двох аналогічних формулах.

1. $$\varepsilon = \frac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1} \quad (\textit{правило Рунге}) \qquad (6)$$

2. $$y(x_k) \approx \breve{y}_{2k} + \varepsilon = \breve{y}_{2k} + \frac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1} \quad (\textit{формула екстраполяції за Річардсоном}). \qquad (7)$$

Тут ε – це оцінка похибки наближеного значення y_k в точці x_k, $\breve{y}_{2k} + \varepsilon$ – таке нове наближення до точного значення розв'язку $y(x_k)$, порядок точності якого вже $s+1$. Процес можна продовжити і далі, отримуючи наближення порядку $s + 2$, $s + 3$, … . Це складає апостеріорний метод *кратного перерахунку*, який є узагальненням методу подвійного перерахунку. Формул (6) і (7) достатньо для практичної реалізації методів подвійного та кратного перерахунків (дивіться наступний розділ статті). Далі наведені обґрунтування цих формул і, як результат, їх точне формулювання.

Обґрунтування

На кожному з відрізків $[x_k; x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) завдовжки h розглянемо задачу Коші (1) $y' = f(x, y)$; $y(x_k) = y_k$ і заданим методом Рунге – Кутта дістанемо наближене значення розв'язку $y(x_k + h)$ в точці x_{k+1}, яке за умовою дорівнює y_{k+1} та похибку методу на кроці $\varphi_k(h) = y_{k+1} - y(x_k + h) = \dfrac{\varphi_k^{(s+1)}(\theta_k h)}{(s+1)!} h^{s+1}$ ($0 < \theta_k < 1$) згідно з означенням 2.

Зокрема, на першому кроці $\varphi_0(h) = y_1 - y(x_0 + h) = \dfrac{\varphi_0^{(s+1)}(\theta_0 h)}{(s+1)!} h^{s+1}$ ($0 < \theta_0 < 1$), на другому

$\varphi_1(h) = y_2 - y(x_1 + h) = \dfrac{\varphi_1^{(s+1)}(\theta_1 h)}{(s+1)!} h^{s+1}$ ($0 < \theta_1 < 1$). Як було зазначено та й видно безпосередньо, величина похибки методу Рунге – Кутта порядку точності s на кроці має порядок $s+1$: $\varphi_k(h) = O(h^{s+1})$. Розглянемо перетворення $T_{mk}(z)$ $(m < k)$, яке кожній початковій умові z для задачі Коші $y' = f(x, y)$; $y(x_m) = z$ ставить у відповідність значення розв'язку в точці x_k: $y(x_k) = T_{mk}(z)$. Тоді під дією диференціального рівняння відрізок $[y_1; y(x_0 + h)]$ між точним та наближеним значенням, отриманими на кроці 1, за другий крок пересунеться в $[T_{12}(y_1); T_{12}(y(x_0 + h))]$. Довжина цього відрізку $|T_{12}(y_1) - T_{12}(y(x_0 + h))| = A_{12}|y_1 - y(x_0 + h)| = A_{12}|\varphi_0(h)|$, де $A_{12} > 0$ – стала. Оскільки $|T_{12}(y_1) - T_{12}(y(x_0 + h))| = |\int_{y_1}^{y(x_0+h)} T'_{12}(y)dy| = |T'_{12}(\zeta)| \cdot |y_1 - y(x_0 + h)| = |T'_{12}(\zeta)| \cdot |\varphi_0(h)|$, то $A_{12} = |T'_{12}(\zeta)|$, де $\zeta \in [y_1; y(x_0 + h)]$. Сумарна похибка на другому кроці $\varepsilon_2 = y_2 - y(x_2)$ дорівнює сумі похибки на цьому кроці $\varphi_1(h)$ і похибки на першому кроці $\varphi_0(h)$, перетвореній за другий крок диференціальним рівнянням, тобто перетворенням T_{12}: $\varepsilon_2 = y_2 - y(x_2) = \varphi_1(h) + A_{12}\,\varphi_0(h)$. На третьому кроці сумарна похибка дорівнює сумі похибки на цьому кроці $\varphi_2(h)$, похибки на другому кроці $\varphi_1(h)$, перетвореній за третій крок диференціальним рівнянням, тобто перетворенням T_{23} та похибки на першому кроці $\varphi_0(h)$, перетвореній за другий та третій кроки дією T_{13}: $\varepsilon_3 = y_3 - y(x_3) = \varphi_2(h) + A_{23}\,\varphi_1(h) + A_{13}\,\varphi_0(h)$, де $A_{13} = |T'_{13}(\zeta_{13})|$, $\zeta_{13} \in [y_1; y(x_0 + h)]$, $A_{23} = |T'_{23}(\zeta)|$, $\zeta \in [y_2; y(x_1 + h)]$. У загальному випадку сумарна похибка на кроці k

$$\varepsilon_k = y_k - y(x_k) = \varphi_{k-1}(h) + A_{k-1k}\,\varphi_{k-2}(h) + A_{k-2k}\,\varphi_{k-3}(h) + \ldots + A_{1k}\,\varphi_0(h) = \sum_{i=1}^{k} A_{ik}\varphi_{i-1}(h),$$

де $A_{kk} = 1$, а для $i < k$ $A_{ik} = |T'_{ik}(\zeta_{ik})|$, де $\zeta_{ik} \in [y_i; y(x_{i-1} + h)]$.

На кожному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ розташовані два відрізка: $[\breve{x}_{2k}; \breve{x}_{2k+1}]$ та $[\breve{x}_{2k+1}; \breve{x}_{2k+2}]$ (бо $x_k = \breve{x}_{2k}$, $x_{k+1} = \breve{x}_{2k+2}$). Аналогічно попередньому на кожному з цих відрізків завдовжки $h/2$ розглянемо задачу Коші (1) $y' = f(x, y)$; $y(\breve{x}_{2k}) = \breve{y}_{2k}$ і $y' = f(x, y)$; $y(\breve{x}_{2k+1}) = \breve{y}_{2k+1}$. Даним методом Рунге – Кутта дістанемо наближене значення розв'язку $y(\breve{x}_{2k} + h/2)$ у точці $\breve{x}_{2k+1}$, яке за побудовою дорівнює $\breve{y}_{2k+1}$ та наближене значення розв'язку $y(\breve{x}_{2k+1} + h/2)$ у точці $\breve{x}_{2k+1}$, яке дорівнює $\breve{y}_{2k+2}$. Дістанемо також похибки методу на кроці $\breve{\varphi}_{2k}(h/2) = \breve{y}_{2k+1} - y(\breve{x}_{2k} + h/2) = \dfrac{\breve{\varphi}_{2k}^{(s+1)}(\theta_{2k}\,h)}{(s+1)!}(h/2)^{s+1}$ $(0 < \theta_{2k} < 1/2)$ і $\breve{\varphi}_{2k+1}(h/2) = \breve{y}_{2k+2} - y(\breve{x}_{2k+1} + h/2) = \dfrac{\breve{\varphi}_{2k+1}^{(s+1)}(\theta\,h)}{(s+1)!}(h/2)^{s+1}$ $(0<\theta_{2k+1}<1/2)$, які мають порядок $s+1$. Розглянемо також перетворення $\breve{T}_{mk}(z)$ $(m < k)$, яке кожній початковій умові z для задачі Коші $y' = f(x, y)$; $y(\breve{x}_m) = z$ ставить у відповідність значення розв'язку в точці $\breve{x}_k$: $y(\breve{x}_k) = \breve{T}_{mk}(z)$. Тоді $\breve{\varepsilon}_k$ – сумарна похибка на кроці $2k$ – це, як і вище, $\breve{\varepsilon}_k = \breve{y}_{2k} - y(x_k) = \sum_{i=1}^{2k} \breve{A}_{ik}\breve{\varphi}_{i-1}(h/2) =$

$$= \breve{\varphi}_{2k-1}(h/2) + \breve{A}_{2k-1\,2k}\,\breve{\varphi}_{2k-2}(h/2) + \breve{A}_{2k-2\,2k}\,\breve{\varphi}_{2k-3}(h/2) + \ldots + \breve{A}_{12k}\,\breve{\varphi}_0(h/2),$$

де $\breve{A}_{2k\,2k} = 1$, а для $i < k$ $\breve{A}_{i\,2k} = |\breve{T}'_{i\,2k}(\breve{\zeta}_{i\,2k})|$, $\breve{\zeta}_{i\,2k} \in [\breve{y}_i; y(\breve{x}_{i-1} + h/2)]$. Отже, одночасно

$$y(x_k) = y_k - \varepsilon_k = y_k - \sum_{i=1}^{k} A_{ik}\varphi_{i-1}(h) \qquad (8)$$

$$y(x_k) = \breve{y}_{2k} - \breve{\varepsilon}_k = \breve{y}_{2k} - \sum_{i=1}^{2k} \breve{A}_{ik}\breve{\varphi}_{i-1}(h/2). \qquad (9)$$

На відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ розташовані два відрізка $[\breve{x}_{2i}; \breve{x}_{2i+1}]$ та $[\breve{x}_{2i+1}; \breve{x}_{2i+2}]$, ($x_i = \breve{x}_{2i}$, $x_{i+1} = \breve{x}_{2i+2}$), тож доданку $A_{ik}\varphi_{i-1}(h) = A_{ik}\dfrac{\varphi_{i-1}^{(s+1)}(\theta_{i-1}h)}{(s+1)!}h^{s+1}$ $(0 < \theta_{i-1} < 1)$ у (8) відповідають два доданки у (9): $\breve{A}_{2i\,2k}\,\breve{\varphi}_{2i-1}(h/2) = \breve{A}_{2i\,2k}\dfrac{\breve{\varphi}_{2i-1}^{(s+1)}(\theta_{2i-1}h)}{(s+1)!}(h/2)^{s+1}$ $(0 < \theta_{2i-1} < 1/2)$ і $\breve{A}_{2i+1\,2k}\,\breve{\varphi}_{2i}(h/2) = \breve{A}_{2i+1\,2k}\dfrac{\breve{\varphi}_{2i}^{(s+1)}(\theta_{2i}h)}{(s+1)!}(h/2)^{s+1}$ $(0 < \theta_{2i} < 1/2)$. Тут $A_{ik} = |T'_{ik}(\zeta_{ik})|$, де $\zeta_{ik} \in [y_i; y(x_{i-1} + h)]$, $\breve{A}_{2i\,2k} = |\breve{T}'_{2i\,2k}(\breve{\zeta}_{2i\,2k})|$, де $\breve{\zeta}_{2i\,2k} \in [\breve{y}_{2i}; y(\breve{x}_{2i-1} + h/2)]$, $\breve{A}_{2i+1\,2k} = |\breve{T}'_{2i+1\,2k}(\breve{\zeta}_{2i+1\,2k})|$, де $\breve{\zeta}_{2i+1\,2k} \in [\breve{y}_{2i+1}; y(\breve{x}_{2i} + h/2)]$ відрізняються між собою величиною порядку h згідно з теоремою Лагранжа, оскільки за означенням $T_{ik} = \breve{T}_{2i\,2k}$, а $\breve{T}_{2i+1\,2k}$ відрізняється від $\breve{T}_{2i\,2k}$ значеннями порядку h. Так само і величини $\varphi_{i-1}^{(s+1)}(\theta_{i-1}h)$, $\breve{\varphi}_{2i-1}^{(s+1)}(\theta_{2i-1}h)$ і $\breve{\varphi}_{2i}^{(s+1)}(\theta_{2i}h)$ за означенням відрізняються між собою величиною порядку h згідно з теоремою Лагранжа. Тому спочатку знехтуємо відмінністю між величинами $A_{ik}\varphi_{i-1}^{(s+1)}(\theta_{i-1}h)$, $\breve{A}_{2i\,2k}\,\breve{\varphi}_{2i-1}^{(s+1)}(\theta_{2i-1}h)$, $\breve{A}_{2i+1\,2k}\,\breve{\varphi}_{2i}^{(s+1)}(\theta_{2i}h)$ порядку h і покладемо $M_i = A_{ik}\dfrac{\varphi_{i-1}^{(s+1)}(\theta_{i-1}h)}{(s+1)!} \approx \breve{A}_{2i\,2k}\dfrac{\breve{\varphi}_{2i-1}^{(s+1)}(\theta_{2i-1}h)}{(s+1)!} \approx \breve{A}_{2i+1\,2k}\dfrac{\breve{\varphi}_{2i}^{(s+1)}(\theta_{2i}h)}{(s+1)!}$. Тоді (8) і (9) набувають вигляду

$$y(x_k) = y_k - \varepsilon_k \approx y_k - \sum_{i=1}^{k} M_i h^{s+1} = y_k - Ch^s \tag{10}$$

$$y(x_k) = \breve{y}_{2k} - \breve{\varepsilon}_k \approx \breve{y}_{2k} - 2\sum_{i=1}^{k} M_i (h/2)^{s+1} = \breve{y}_{2k} - C(h/2)^s, \tag{11}$$

де $C = \sum_{i=1}^{k} M_i h$. (Якщо відрізок $[x_0, x_k]$ вважати порядку одиниці, то $k \sim \dfrac{1}{h}$, а отже і $C = h\sum_{i=1}^{k} M_i$ порядку одиниці). Відомими в (11) є y_k, $\breve{y}_{2k}$, h і s, невідомими $y(x_k)$ та C. Отже, це система двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Звідси $\breve{y}_{2k} - C(h/2)^s - (y_k - Ch^s) \approx 0$; $\breve{y}_{2k} - y_k \approx C(\dfrac{h}{2})^s - Ch^s = C(\dfrac{h}{2})^s(1 - 2^s) = \breve{\varepsilon}_k(1 - 2^s)$, звідки знаходимо (6) $\breve{\varepsilon}_k \approx -\dfrac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1}$ (правило Рунге). Тому (7): $y(x_k) \approx \breve{y}_{2k} + \dfrac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1}$ (аналог формули екстраполяції за Річардсоном). Єдине неточне припущення, яке було зроблено в цьому доведенні – це рівність $A_{ik}\dfrac{\varphi_{i-1}^{(s+1)}(\theta_{i-1}h)}{(s+1)!} \approx \breve{A}_{2i\,2k}\dfrac{\breve{\varphi}_{2i-1}^{(s+1)}(\theta_{2i-1}h)}{(s+1)!} \approx \breve{A}_{2i+1\,2k}\dfrac{\breve{\varphi}_{2i}^{(s+1)}(\theta_{2i}h)}{(s+1)!}$, насправді ці величини відрізняються між собою на величини порядку h. Тому різниці між величинами

$A_{ik}\varphi_{i-1}(h) = A_{ik}\dfrac{\varphi_{i-1}^{(s+1)}(\theta_{i-1}h)}{(s+1)!}h^{s+1}$, $\breve{A}_{2i\,2k}\,\breve{\varphi}_{2i-1}(h) = \breve{A}_{2i\,2k}\dfrac{\breve{\varphi}_{2i-1}^{(s+1)}(\theta_{2i-1}h)}{(s+1)!}h^{s+1}$ і $\breve{A}_{2i+1\,2k}\,\breve{\varphi}_{2i}(h) = \breve{A}_{2i+1\,2k}\dfrac{\breve{\varphi}_{2i}^{(s+1)}(\theta_{2i}h)}{(s+1)!}h^{s+1}$ – це величини порядку h^{s+2}, а різниці між їх сумами по всім $k = 0, 1, \ldots, n$ – величини порядку h^{s+1}. Урахування цих величин приводить до точного варіанту формул (6) і (7):

$$1.\quad \breve{\varepsilon}_k = -\frac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1} + O(h^{s+1}), \qquad 2.\quad y(x_k) = \breve{y}_{2k} + \frac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1} + O(h^{s+1}). \tag{12}$$

Отже, $\breve{\breve{y}}_{2k} = \breve{y}_{2k} + \dfrac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1}$ – це наближення до точного розв'язку y(x_k) порядку точності s + 1 у точці x_k. Нехай ще дана послідовність рівновіддалених точок $\hat{x}_0$, $\hat{x}_1$, …, $\hat{x}_{4n}$ з кроком інтегрування h/4 так, щоби $\hat{x}_{4k} = x_k$ (k = 0, 1, …, n). Розглянемо задачу Коші (1) $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y(\hat{x}_0) = y_0$, її чисельні розв'язки $\hat{y}_0$, $\hat{y}_1$, …, $\hat{y}_{4n}$, отримані тим же методом Рунге – Кутта порядку точності s. Тоді метод подвійного перерахунку так само можна застосувати до цієї послідовності наближень і до попередньої $\breve{y}_0$, $\breve{y}_1$, …, $\breve{y}_{2n}$ з кроком h/2 у точках $\breve{x}_0$, $\breve{x}_1$, …, $\breve{x}_{2n}$ ($\breve{x}_{2k} = \hat{x}_{4k}$). У результаті отримаємо оцінку похибки за правилом Рунге і уточнене значення за аналогом формули екстраполяції Річардсона:

$$1.\ \hat{\varepsilon}_k = -\frac{\hat{y}_{4k} - \breve{y}_{2k}}{2^s - 1} + O(h^{s+1}), \qquad 2.\ y(x_k) = \hat{y}_{4k} + \frac{\hat{y}_{4k} - \breve{y}_{2k}}{2^s - 1} + O(h^{s+1}). \qquad (13)$$

Тут $\hat{\hat{y}}_{4k} = \hat{y}_{4k} - \dfrac{\hat{y}_{4k} - \breve{y}_{2k}}{2^s - 1}$ – це, як і $\breve{\breve{y}}_{2k}$, ще одне наближення порядку точності s + 1 до точного розв'язку y(x_k) у точці x_k. Тоді можна знову застосувати правило Рунге до цих двох уточнених наближень $\hat{\hat{y}}_{4k}$ і $\breve{\breve{y}}_{2k}$: $\bar{\varepsilon}_k = -\dfrac{\hat{\hat{y}}_{4k} - \breve{\breve{y}}_{2k}}{2^{s+1} - 1} + O(h^{s+2})$. Тобто $\bar{\varepsilon}_k$ насправді виявиться похибкою порядку h^{s+1}, а уточнене наближення $\bar{y}_{4k} = \hat{\hat{y}}_{4k} + \dfrac{\hat{\hat{y}}_{4k} - \breve{\breve{y}}_{2k}}{2^{s+1} - 1}$ буде мати порядок уже принаймні порядок точності s + 2. Процес можна продовжити і далі, отримуючи наближення порядку s + 3, s + 4, … .

Реалізація методу кратного перерахунку в навчальному курсі методів обчислень.

Приклад. Знайти чисельний розв'язок задачі Коші $y' = \sin(0{,}5x + 2y^2) + 1{,}5y$, $y(0) = 1$ на відрізку [0; 1] методом Рунге – Кутта другого порядку точності за формулою $y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, де $\bar{x}_k = x_k + {}^2\!/_3 h$ з точністю 10^{-4}, оціненою методом кратного перерахунку.

Розв'язання. Згідно з означенням 3, задана рекурентна формула визначає метод Рунге – Кутта другого порядку точності за умови, що його параметри задовольняють (5). За умовою тут $\alpha_2 = \dfrac{2}{3}$, звідки $\beta_{21} = \dfrac{2}{3}$, $p_2 = \dfrac{3}{4}$, $p_1 = \dfrac{1}{4}$. Отже,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4}hf(x_k, y_k) + \frac{3}{4}hf(\bar{x}_k, \bar{y}_k), \quad \text{де } \bar{x}_k = x_k + \frac{2}{3}h,\ \bar{y}_k = y_k + \frac{2}{3}h f(x_k, y_k).$$

Спочатку задамо кроки інтегрування 0,2 0,1 0,05 0,025 у чарунках H1:H4, знайдемо чисельні розв'язки для таких кроків і оцінимо їх методом кратного перерахунку. Якщо потрібна точність не буде досягнута, то крок буде зменшено. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C
1	x	y	w1
2	0	1	= \$H\$1*(SIN(0,5*A2+2*B2^2)+1,5*B2)
3	= A2 + \$H\$1	= B2 + 1/4*C2 + 3/4*F2	↓
4	↓	↓	↓
	D	E	F
1	x1	y1	w2
2	= A2 + 2/3*\$H\$1	= B2 + 2/3*C2	= \$H\$1*(SIN(0,5*D2+2*E2^2)+1,5*E2)
3	↓	↓	↓
4	↓	↓	↓

В результаті дістанемо:

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	w1	x1	y1	w2
2	0	1	0,481859	0,133333	1,32124	0,315474
3	0,2	1,35707	0,287412	0,333333	1,548678	0,270875
6	0,8	3,114989	1,097962	0,933333	3,846964	0,958901
7	1	4,108655	1,290827	1,133333	4,969206	1,429217

Скопіюємо A2:F3 у будь – які вільні від інформації діапазони, а потім у відповідних чарунках у H1 замінимо 1 на 2, 3 або 4. За цими обрахунками створимо наступну електронну таблицю кратного перерахунку. У кінцевій точці 1 (оскільки саме в ній слід очікувати найбільшу похибку):

	H	I	J	K	L
34	№ перерахунку	1		2	
35	h	y(1)	E	y(1)	ε
36	0,2	4,108655			
37	0,1	3,971733	= 1/3*(I37–I36)	= I37+J37	
38	0,05	4,056332	↓	↓	= 1/7*(K38–K37)
39	0,025	4,051298	↓	↓	↓

Тут у стовпці H крок інтегрування, у стовпці I наближені значення в точці 1, отримані при попередніх підрахунках з відповідним кроком, у стовпці J похибка ε, підрахована за правилом Рунге (6) $\varepsilon \approx \dfrac{\breve{y}_{2k} - y_k}{2^s - 1}$, де s – порядок точності методу. В даному разі $2^s - 1 = 3$, бо $s = 2$. На цьому закінчився перший перерахунок. У стовпці K знаходимо уточнені наближення порядку точності 3 за формулою (5), у стовпці L їх оцінки ε знову за правилом Рунге, але тепер $2^s - 1 = 7$, бо $s = 3$. У сукупності це другий перерахунок. Далі аналогічно проводимо третій перерахунок: із зростанням номеру перерахунку N на одиницю порядок точності методу s теж зростає на одиницю, отже тут $s = 4$, $2^s - 1 = 15$:

	M	N	O	P
34	1		2	
35	y(1)	E	y(1)	ε
36				
37				
38	= K38 + L38			
39	↓	= 1/15*(M39 – M38)	= M39 + N39	

В результаті отримаємо таку трикутну таблицю (матрицю):

	H	I	J	K	L	M	N	O
34	№		1		2		3	4
35	h	y(1)	ε	y(1)	E	y(1)	ε	y(1)
36	0,2	4,108655						
37	0,1	3,971733	-0,04564	3,926093				
38	0,05	4,056332	0,0282	4,084532	0,022634	4,107166		
39	0,025	4,051298	-0,00168	4,04962	-0,00499	4,044633	-0,00417	4,040464

Згідно з отриманими апостеріорними оцінками тут всі наближення мають якнайбільше три значущих цифри, що є недостатньою точністю за умовою задачі. Отже, знайдемо чисельний розв’язок даної задачі Коші з кроком інтегрування h = 0,0125 і додамо до таблиці кратного перерахунку отримане значення y(1). За підрахунками:

	H	I	J	K	L	M
45	x	y	w1	x1	y1	w2
46	0	1	0,030116	0,008333	1,020077	0,030008
47	0,0125	1,030035	0,029921	0,020833	1,049983	0,029679
124	0,975	3,90607	0,068214	0,983333	3,951547	0,077847
125	0,9875	3,981509	0,083468	0,995833	4,037155	0,088123
126	1	4,068469	0,086471	1,008333	4,126116	0,077411

Отже, достатньо занести отримане значення y(1) = 4,068469 у чарунку I40 поряд з відповідним значенням кроку h = 0,0125 у чарунці H40, решту формул у стовпцях J:O можна просто скопіювати:

	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
34	№	1		2		3		4		5	
35	h	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)	ε
36	0,2	4,108655									
37	0,1	3,971733	*	*							
38	0,05	4,056332	↓	↓	*	*					
39	0,025	4,051298	↓	↓	↓	↓	*	*			
40	0,0125	4,068469	↓	↓	↓	↓	↓	↓	=(O40-O39)/31	=O40+P40	

Тут символ * означає, що у відповідній чарунці знаходиться та ж сама формула, що й у попередній таблиці. Для N = 4 s = 5, $2^s – 1 = 31$, тому P40 = (O40 – O39)/31. У результаті отримаємо таку трикутну таблицю:

	H	I	J	K	L
34	№		1		2
35	h	y(1)	E	y(1)	ε
36	0,2	4,108655			
37	0,1	3,971733	-0,04564	3,926093	
38	0,05	4,056332	0,0282	4,084532	0,022634
39	0,025	4,051298	-0,00168	4,04962	-0,00499
40	0,0125	4,068469	0,005724	4,074192	0,00351

	M	N	O	P	Q
34		3		4	5
35	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)
36					
37					
38	4,107166				
39	4,044633	-0,00417	4,040464		
40	4,077703	0,002205	4,079907	0,001272	4,08118

На четвертому перерахунку наближення досягло вже чотирьох значущих цифр, проте точності 10^{-4}, яку вимагає умова задачі, ще не досягнуто. Тому знайдемо ще й чисельний розв’язок даної задачі Коші з кроком інтегрування h = 0,0125 і отримане значення y(1) додамо до таблиці кратного перерахунку. За підрахунками:

	A	B	C	D	E	F
205	x	y	w1	x1	y1	w2
206	0,9625	3,846446	0,02997	0,966667	3,866426	0,030876
207	0,96875	3,877096	0,03158	0,972917	3,898149	0,033341
208	0,975	3,909996	0,0345	0,979167	3,932996	0,036938
209	0,98125	3,946325	0,038371	0,985417	3,971905	0,040913
210	0,9875	3,986602	0,042126	0,991667	4,014686	0,043685
211	0,99375	4,029897	0,04403	0,997917	4,05925	0,043635
212	1	4,073631	0,042962	1,004167	4,102272	0,040882

Отже, отримане значення y(1) = 4,068469 заносимо до таблиці кратного перерахунку. У результаті отримаємо таку таблицю:

	H	I	J	K	L
34	№		1		2
35	h	y(1)	ε	y(1)	ε
36	0,2	4,108655			
37	0,1	3,971733	-0,04564	3,926093	
38	0,05	4,056332	0,0282	4,084532	0,022634
39	0,025	4,051298	-0,00168	4,04962	-0,00499
40	0,0125	4,068469	0,005724	4,074192	0,00351

41	0,00625	4,073631	0,001721	4,075352	0,000166		
	M	N	O	P	Q	R	S
34		3		4		5	6
35	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)	ε	y(1)
36							
37							
38	4,107166						
39	4,044633	-0,00417	4,040464				
40	4,077703	0,002205	4,079907	0,001272	4,08118		
41	4,075518	-0,00015	4,075372	-0,00015	4,075226	-9,45052E-05	4,075131

Як бачимо, тепер необхідна точність досягнута вже на другому перерахунку. На п'ятому перерахунку досягнуто ще більшої точності. Відповідь: y(1) = 4,075131 ± 9,45052E-05.

Висновок. Для задач Коші (1) з функцією $f(x, y)$ загального вигляду порядок уточненого значення y_k в заданій точці x_k при перерахунках кратним методом зростає білінійно із зростанням порядку точності методу p і числа кроків перерахунку n. Збіг такого методу є найшвидшим можливим за цими параметрами.

Висновок про ефективність насправді розповсюджується на всі задачі Коші (1), оскільки функції $f(x, y)$ є границями функцій загального вигляду [6] за теоремою Сарда [7].

Перспектива подальших досліджень.

Метод кратного перерахунку фактично без сумніву узагальнюється на випадок кратних інтегралів та диференціальних рівнянь вищих порядків. Проте доведення методу для цих випадків значно ускладнюється.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Н. С. Бахвалов Численные методы т. 1. / – М.: "Наука", 1973. – 631 с.
2. О.Й.Вейцбліт Метод кратного перерахунку Інформаційні технології в освіті випуск 7 – Херсон 2011 С. 50 - 58
3. http://forum.ixbt.com – «Быстрое отображение векторной графики. Алгоритмы»
4. http://gis-lab.info – «GIS-Lab - Географические информационные системы и дистанционное зондирование». 2002-2010
5. И. С. Березин, Н. П. Жидков Методы вычислений т. 1. / – М.: "Наука", 1966. – 632 с.
6. М. Рид, Б. Саймон Методы современной математической физики т.1. / М: Мир, 1977. 358 с.
7. В. И. Арнольд Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. / – М.: "Наука", 1978. – 302с.