УДК 517.946

МЕТОД КРАТНОГО ПЕРЕРАХУНКУ

Вейцбліт О.Й.
Херсонський державний університет

У роботі для аналізу результатів інтегрування функцій пропонується апостеріорний метод кратного перерахунку, який є узагальненням методу подвійного перерахунку Рунге – Річардсона.

Ключові слова: *чисельний, метод, алгоритм, інтегрування, функція*

Постановка задачі

Чисельні методи – це алгоритми знаходження розв'язків основних математичних задач, доведених до числових відповідей. Навчальний курс чисельних методів базується на всіх основних математичних курсах. Водночас чисельні методи щільно пов'язані з курсами алгоритмізації та програмування. Курс, у якому програми були б лише застосуванням та ілюстрацією теоретичних досліджень, створював би дуже скривлену панораму. Насправді, часто обчислювальний експеримент грає провідну роль у створенні математичної моделі та чисельних методів, апостеріорні методи аналізу результатів обчислень, як правило, значно точніші та поширеніші апріорних методів [1].

У цій роботі для аналізу результатів інтегрування функцій пропонується апостеріорний метод кратного перерахунку, який є узагальненням методу подвійного перерахунку Рунге – Річардсона [2]. Далі наведені приклади реалізації цього методу засобами Excel, які не є лише ілюстрацією математичних надбань. Вони мотивують поняття та методи, є базою для подальшої модифікації алгоритмів. Зауважимо, що при викладанні чисельних методів застосування Excel взагалі має свої переваги. Його простота та відкритість прислуговує легкості модифікації алгоритмів, потужний графічний інтерфейс – аналізу результатів, який іноді здатен перетворюватися у "математику в малюнках" [3], [4].

Особливий інтерес до чисельних методів інтегрування є традиційним. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку [a; b] і відома її первісна F, то справедлива формула Ньютона – Лейбниця $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Проте цією формулою неможливо скористатися, якщо первісну F не можна виразити у відомих (традиційно в елементарних) функціях, або якщо функцію f задано таблично або графічно. У цих випадках необхідно будувати методи для наближеного визначення інтегралів. Диференціальне та інтегральне числення – саме таку назву мав математичний аналіз спочатку, і це підкреслювало калькулятивне, алгоритмічне спрямування цієї дисципліни. Проте теорії диференціального і інтегрального числень згодом виявилися значно відмінними: диференціальне числення – алгоритм, інтегрування ж для більшості функцій або зовсім нездійснене "на папері", або є складною задачею, дуже далекою від алгоритму. З іншого боку, інтегрування – стійка, а диференціювання – нестійка операція [4], що значно знижує ефективність алгоритмів диференціювання. Такий збіг обумовив те, що чисельні алгоритми є головним засобом розв'язання задач інтегрування; наближене ж диференціювання на практиці застосовують досить рідко.

Проте, апріорні оцінки результатів чисельного інтегрування, як правило, значно завищені. Крім того, просто підрахувати ці оцінки іноді дуже важко або й неможливо (тоді, наприклад, коли функцію задано графічно чи таблично). Всі ці недоліки можна усунути, застосувавши апостеріорні методи.

Методи подвійного та кратного перерахунку

Квадратурні формули – це формули вигляду $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$. Суму $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ в правій частині формули називають квадратурною сумою, числа x_k і A_k називають вузлами і коефіцієнтами квадратурної формули відповідно. Різницю між визначеним інтегралом і квадратурною сумою $R(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ називають залишковим членом або похибкою квадратурної формули.

Зазначимо, що крім похибки методу, тобто залишкового члена $R(f)$, треба враховувати й інші похибки розв'язку. Це, по-перше, так звана неусувна похибка, яка зумовлена наближеними значеннями $f(x_k)$: якщо абсолютні похибки значень $f(x_k)$ дорівнюють Δ, то абсолютна похибка квадратурної суми $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ дорівнюватиме $R_1 = \Delta \cdot \sum_{k=1}^{n} |A_k|$. Треба враховувати також похибку обчислення R_2, що виникає за рахунок округлення проміжних результатів. Отже, повна похибка чисельного інтегрування R дорівнює $R = R(f) + R_1 + R_2$.

Точність квадратурної формули звичайно характеризують порядком її залишкового члена $R(f)$ стосовно степеня відстані між вузлами інтегрування h, тобто кроку інтегрування [1].

Означення. Залишковий член $R(f)$ квадратурної формули має порядок k (де k – натуральне число) відносно кроку інтегрування h, якщо існують такі сталі C, c > 0, що $ch^k \le |R(f)| \le Ch^k$ для всіх достатньо малих h. Записують це так: $R(f) = O(h^k)$.

Якщо крок h достатньо малий, то квадратурна формула тим точніша, чим більшим є порядок її залишкового члена. Проте, коли крок h не малий, наближається до одиниці, тоді оцінки квадратурних формул стають неприйнятними. Тому, якщо функцію $f(x)$ задано на великому проміжку [a; b], то для обчислення $\int_a^b f(x)dx$ застосовують відповідну *узагальнену квадратурну формулу*. Це означає, що відрізок [a; b] ділять на рівні відрізки і на кожному з них застосовують дану квадратурну формулу. Отже, для будь – якої квадратурної формули і довільного натурального n можна побудувати на відрізку [a; b] відповідну узагальнену квадратурну формулу. Легко зрозуміти, що залишковий член такої узагальненої формули має порядок k – 1, де k – порядок залишкового члена даної неузагальненої формули.

Нехай залишковий член деякої узагальненої квадратурної формули має порядок p відносно кроку інтегрування h: $R(f) = O(h^p)$. Поділимо відрізок [a; b] на n рівних відрізків і на 2n рівних відрізків, нехай I_n та I_{2n} – відповідні наближені значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за цією квадратурною формулою, а $R_n(f)$ і $R_{2n}(f)$ – відповідні залишкові члени. Метод подвійного перерахунку ґрунтується на двох формулах.

1. $$R_{2n}(f) \approx \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1} \quad \text{(правило Рунге)} \qquad (1)$$

2. $$\int_a^b f(x)dx \approx I_{n,2n} = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1} \quad \text{(формула екстраполяції за Річардсоном).} \qquad (2)$$

Назва екстраполяція пов'язана з тим, що коли $I_n \ne I_{2n}$, то уточнене значення $I_{n,2n}$ ніколи не лежить між I_n та I_{2n}. Справді, якщо $I_{2n} > I_n$, то з (2) випливає, що $I_{n,2n} > I_{2n} = \max\{I_n, I_{2n}\}$. Якщо ж $I_{2n} < I_n$, то $I_{n,2n} < I_{2n} = \min\{I_n, I_{2n}\}$. Формул (1) і (2) достатньо для практичної реалізації методів подвійного та кратного перерахунків (дивіться наступний розділ статті). Тут наведені доведення цих методів і водночас їх точне формулювання.

Обґрунтування

Функцію f(x) будемо вважати диференційовною стільки разів, скільки це виявиться необхідним. Спочатку зазначимо, що оскільки завжди залишковий член квадратурної формули Ньютона – Котеса [1] на відрізку [a; b] $R(f) = \int_a^b R_m(f,x)dx$, де $R_m(f, x) = f(x) - L_m(x)$ – залишковий член інтерполяційної формули, а $R_m(f, x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\omega_{m+1}(x)$, де $\xi = \xi(x) \in [a; b]$, [], то і $R(f) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\int_a^b \omega_{m+1}(x)dx$, де $\xi \in [a; b]$. Справді, оскільки $\min\limits_{[a;b]} f^{(m+1)}(x)\int_a^b \frac{\omega_{m+1}(x)}{(m+1)!}dx \le R(f) \le \max\limits_{[a;b]} f^{(m+1)}(x)\int_a^b \frac{\omega_{m+1}(x)}{(m+1)!}dx$, а функція $f^{(m+1)}(x)$ неперервна, то для деякого $\xi \in [a; b]$ $R(f) = f^{(m+1)}(\xi)\int_a^b \frac{\omega_{m+1}(x)}{(m+1)!}dx$,

$$R(f) = f^{(m+1)}(\xi)\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_m)}{(m+1)!}dx = f^{(m+1)}(\xi)\hat{D}h^{m+2}, \qquad (3)$$

де $h = b - a$ – довжина відрізку, а $\hat{D}$ – стала. Тут $\hat{D} = \int_{-1}^{1}\frac{(t-d_0)(t-d_1)...(t-d_n)}{(m+1)!\cdot 2^{m+2}}dt$, $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$, $x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}d_j$ (j = 0, 1, … , m). Очевидно, порядок $R(f)$ згідно (3) дорівнює m + 2. Формулу (3) використаємо для обґрунтування (1) і (2), до чого й переходимо безпосередньо.

Нехай задана деяка узагальнена квадратурна формула Ньютона – Котеса порядку p відносно кроку інтегрування h: $R(f) = O(h^p)$. Поділимо відрізок [a; b] на n рівних відрізків завдовжки $h = (b - a)/n$ точками $a = x_0 < x_1 < … < x_k < … < x_n = b$ і на 2n рівних відрізків завдовжки $h/2 = (b - a)/2n$ точками $a = y_0 < y_1 < … < y_k < … < y_{2n} = b$ так, щоби $x_k = y_{2k}$ (k = 0, 1, …, n). За означенням узагальненої квадратурної формули до кожного з відрізків $[x_k; x_{k+1}]$ застосуємо дану неузагальнену формулу Ньютона – Котеса і отримаємо відповідні наближені значення I_{nk} інтеграла $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ та залишкові члени $R_{nk}(f)$. Згідно з висновком після означення $R_{nk}(f) = O(h^{p+1})$, згідно з (3) $R_{nk}(f) = f^{(m+1)}(\xi_{nk})\hat{D}h^{m+2}$, де $\xi_{nk} \in [x_k; x_{k+1}]$, звідки p = m + 1. За побудовою на кожному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ розташовані два відрізка: $[y_{2k}; y_{2k+1}]$ та $[y_{2k+1}; y_{2k+2}]$ (бо $x_k = y_{2k}$, $x_{k+1} = y_{2k+2}$). Аналогічно дістанемо на кожному з цих відрізків наближені значення I_{2n2k} інтеграла $\int_{y_{2k}}^{y_{2k+1}} f(x)dx$ та I_{2n2k+1} інтеграла $\int_{y_{2k+1}}^{y_{2k+2}} f(x)dx$ і відповідні залишкові члени $R_{2n2k}(f)$ та $R_{2n2k+1}(f)$:

$R_{2n2k}(f) = O(\frac{h}{2})^{p+1}$, $R_{2n2k+1}(f) = O(\frac{h}{2})^{p+1}$, $R_{2n2k}(f) = f^{(m+1)}(\xi_{2n2k})\hat{D}(\frac{h}{2})^{p+1}$, $R_{2n2k+1}(f) = f^{(m+1)}(\xi_{2n2k+1})\hat{D}(\frac{h}{2})^{p+1}$, оскільки p + 1 = m + 2 ($\xi_{2n2k} \in [y_{2k}; y_{2k+1}]$, $\xi_{2n2k+1} \in [y_{2k+1}; y_{2k+2}]$) .

Отже, інтеграл $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = I_{nk} + R_{nk}(f) = I_{nk} + M_{nk}\hat{D}h^{p+1}$, де $M_{nk} = f^{(m+1)}(\xi_{nk})$. Але $\sum\limits_{k=0}^{n-1} I_k$

$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = I$, а за означенням узагальненої квадратурної формули $\sum_{k=0}^{n-1} I_{nk} = I_n$, $\sum_{k=0}^{n-1} R_{nk}(f) = R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_{nk}\cdot\hat{D}\,h^{p+1}$. Тому $I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} I_{nk} + \sum_{k=0}^{n-1} R_{nk}(f) = I_n + R_n(f) = I_n + \sum_{k=0}^{n-1} M_{nk}\cdot\hat{D}\,h^{p+1}$. З іншого боку, $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_{y_{2k}}^{y_{2k+1}} f(x)dx + \int_{y_{2k+1}}^{y_{2k+2}} f(x)dx = (I_{2n2k} + R_{2n2k}(f)) + (I_{2n2k+1} + R_{2n2k+1}(f)) = (I_{2n2k} + I_{2n2k+1}) + (R_{2n2k}(f) + R_{2n2k+1}(f)) = (I_{2n2k} + I_{2n2k+1}) + (M_{2n2k} + M_{2n2k+1})\hat{D}\cdot(\frac{h}{2})^{p+1}$, де $M_{2n2k} = f^{(m+1)}(\xi_{2n2k})$, $M_{2n2k+1} = f^{(m+1)}(\xi_{2n2k+1})$. Але за означенням узагальненої квадратурної формули $\sum_{k=0}^{n-1}(I_{2n2k} + I_{2n2k+1}) = I_{2n}$, $\sum_{k=0}^{n-1}(R_{2n2k}(f) + R_{2n2k+1}(f)) = R_{2n}(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_{2n2k} + M_{2n2k+1})\cdot\hat{D}(\frac{h}{2})^{p+1}$. Тому з іншого боку $I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1}(I_{2n2k} + I_{2n2k+1}) + \sum_{k=0}^{n-1}(R_{2n2k}(f) + R_{2n2k+1}(f)) = I_{2n} + R_{2n}(f) = I_{2n} + \sum_{k=0}^{n-1}(M_{2n2k} + M_{2n2k+1})\cdot\hat{D}(\frac{h}{2})^{p+1}$. Отже,

$$I = I_n + R_n(f) = I_n + \sum_{k=0}^{n-1} M_{nk}\cdot\hat{D}\,h^{p+1}. \tag{4}$$

$$I = I_{2n} + R_{2n}(f) = I_{2n} + \sum_{k=0}^{n-1}(M_{2n2k} + M_{2n2k+1})\cdot\hat{D}(\frac{h}{2})^{p+1}. \tag{5}$$

Спочатку при кожному k знехтуємо відмінністю між M_{nk}, M_{2n2k} і M_{2n2k+1} – значеннями функції $f^{(m+1)}(x)$ на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ довжини $h \to 0$ і покладемо $M_{nk} \approx M_{2n2k} \approx M_{2n2k+1} \approx M_k$, $M = \sum_{k=0}^{n-1} M_k$, $C = M\hat{D}h$. В такому разі отримуємо

$$I = I_n + R_n(f) = I_n + M\hat{D}h^{p+1} = I_n + Ch^p,$$

$$I = I_{2n} + R_{2n}(f) = I_{2n} + 2M\hat{D}(\frac{h}{2})^{p+1} = I_{2n} + C(\frac{h}{2})^p. \tag{6}$$

Відомими в (6) є I_n, I_{2n}, h і p, невідомими I та C. Отже, це система двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Звідси $I_{2n} + C(\frac{h}{2})^p - (I_n + Ch^p) = 0$; $I_{2n} - I_n = Ch^p - C(\frac{h}{2})^p = C(\frac{h}{2})^p(2^p - 1) = R_{2n}(f)(2^p - 1)$, звідки знаходимо $R_{2n}(f) = \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}$ (правило Рунге). Тому $I = I_{2n} + R_{2n}(f) = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}$ (формула екстраполяції за Річардсоном). Це точні формули, єдине неточне припущення у доведенні – рівність $M_{nk} \approx M_{2n2k} \approx M_{2n2k+1} \approx M_k$.
Отже, покладемо $M_k = M_{nk}$, $\Delta_{2n2k} = M_{2n2k} - M_k = f^{(m+1)}(\xi_{2n2k}) - f^{(m+1)}(\xi_{nk}) = f^{(m+2)}(\eta_{2n2k})\cdot(\xi_{2n2k} - \xi_{nk})$, де за теоремою Лагранжа $\eta_{2n2k} \in [\xi_{2n2k}; \xi_{nk}] \subseteq [x_k; x_{k+1}]$, звідки $|\Delta_{2n2k}| \le \max_{[x_k;x_{k+1}]}\left|f^{(m+2)}(x)\right|\cdot h$. Аналогічно $\Delta_{2n2k+1} = M_{2n2k+1} - M_k = f^{(m+1)}(\xi_{2n2k+1}) - f^{(m+1)}(\xi_{nk})$, звідки за

теоремою Лагранжа $|\Delta_{2n2k}| \le \max\limits_{[x_k;x_{k+1}]}\left|f^{(m+2)}(x)\right| \cdot h$. Таким чином $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(M_{2n2k}+M_{2n2k+1}) =$ $2\sum\limits_{k=0}^{n-1}M_k+\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\Delta_{2n2k}+\Delta_{2n2k+1}) = 2M+\Delta$, де $\Delta = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(\Delta_{2n2k}+\Delta_{2n2k+1})$, $|\Delta| \le 2n\max\limits_{[a;b]}\left|f^{(m+2)}(x)\right|\cdot h =$ $2\max\limits_{[a;b]}\left|f^{(m+2)}(x)\right|(b-a)$. Отже, точний варіант (6), що випливає з (4), (5) це

$$I = I_n + R_n(f) = I_n + M\hat{D}h^{p+1} = I_n + Ch^p,$$

$$I = I_{2n} + R_{2n}(f) = I_{2n} + (2M+\Delta)\hat{D}\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} = I_{2n} + C\left(\frac{h}{2}\right)^p + B\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} \quad (B = \Delta\hat{D}). \qquad (7)$$

Як і раніше, звідси $I_{2n} + C(\frac{h}{2})^p + B(\frac{h}{2})^{p+1} - (I_n + Ch^p) = 0$; $I_{2n} - I_n = Ch^p - C(\frac{h}{2})^p - B(\frac{h}{2})^{p+1} =$ $C(\frac{h}{2})^p(2^p-1) - B(\frac{h}{2})^{p+1} = R_{2n}(f)(2^p-1) - (2^p-2)B(\frac{h}{2})^{p+1}$, звідки знаходимо $\frac{I_{2n}-I_n}{2^p-1} = R_{2n}(f) - \frac{2^p-2}{2^p-1}B(\frac{h}{2})^{p+1}$. Отже, значення $\frac{I_{2n}-I_n}{2^p-1}$ відрізняється від $R_{2n}(f)$ на величину $\frac{2^p-2}{2^p-1}B(\frac{h}{2})^{p+1}$ порядку $p+1$ відносно h, тобто на одиницю більшу порядку $R_{2n}(f)$. Тому і величина $I_{n,2n} = I_{2n} + \frac{I_{2n}-I_n}{2^p-1}$ з формули екстраполяції за Річардсоном (2) насправді відрізняється від точного значення інтеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ на ту ж величину $\frac{2^p-2}{2^p-1}B(\frac{h}{2})^{p+1}$ порядку $p+1$, яку природно позначити $R_{n,2n}(f)$. Отже, точні варіанти (1) і (2) це

1. $R_{2n}(f) = \frac{I_{2n}-I_n}{2^p-1} + O(h^{p+1})$, 2. $\int\limits_a^b f(x)dx = I_{n,2n} + R_{n,2n}(f) = I_{2n} + \frac{I_{2n}-I_n}{2^p-1} + O(h^{p+1})$.

Тепер поділимо відрізок [a; b] на n, на 2n і на 4n рівних відрізків, дістанемо $I_{n,2n}$ і аналогічно $I_{2n,4n}$: $\int\limits_a^b f(x)dx = I_{n,2n} + R_{n,2n}(f) = I_{2n,4n} + R_{2n,4n}(f)$, де $R_{n,2n}(f) = O(h^{p+1})$, $R_{2n,4n}(f) = O(\frac{h}{2})^{p+1}$. Так само, як і вище, доведемо, що величина $\frac{I_{2n,4n}-I_{n,2n}}{2^{p+1}-1} = R_{2n,4n}(f) + O(h^{p+2})$, тобто відрізняється від $R_{2n,4n}(f)$ на величину порядку на одиницю більшу за порядок $R_{2n,4n}(f)$. Звідси $\int\limits_a^b f(x)dx = I_{2n,4n} + \frac{I_{2n,4n}-I_{n,2n}}{2^{p+1}-1} + O(h^{p+2})$, тобто отримуємо вже наближення порядку $p+2$. Процес можна продовжити і далі, отримуючи наближення порядку $p+3$, $p+4$, … .

Реалізація методу кратного перерахунку за допомогою Excel

Приклад 1. Обчислимо наближене значення інтеграла функції $f(x) = e^{\sin x}\cos 2x$ на відрізку [0;1] за узагальненою формулою трапецій з кроками інтегрування h = 0,2 0,1 0,05. Уточнимо значення інтеграла і оцінимо його похибку методом кратного перерахунку.

Спочатку побудуємо електронну таблицю значень функції f(x) у вузлах інтегрування. Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B
1	x	f(x)
2	0	= EXP(SIN(A2))*COS(2*A2)
3	= A2 + h	↓
4	↓	↓

Тут символ ↓ означає копіювання попередніх чарунок. Спочатку h = 0,2 і треба копіювати у стовпці A до значення 1, тобто до чарунки A7. В результаті отримаємо таку таблицю:

	A	B
1	x	*f*(x)
2	0	1
3	0,2	1,12349
4	0,4	1,028424
5	0,6	0,637322
6	0,8	-0,05983
7	1	-0,96537

У стовпці C до отриманої таблиці додамо відповідні коефіцієнти Котеса узагальненої формули трапецій:

	A	B	C
1	x	*f*(x)	к
2	0	1	1
3	0,2	1,12349	2
4	0,4	1,028424	2
5	0,6	0,637322	2
6	0,8	-0,05983	2
7	1	-0,96537	1

Аналогічно дістанемо такі таблиці для h = 0,1 і h = 0,05:

	E	F	G
1	x	*f*(x)	к
2	0	1	1
3	0,1	1,082961	2
4	0,2	1,12349	2
5	0,3	1,109107	2
6	0,4	1,028424	2
7	0,5	0,872667	2
8	0,6	0,637322	2
9	0,7	0,323702	2
10	0,8	-0,05983	2
11	0,9	-0,49729	2
12	1	-0,96537	1

	J	K	L
1	x	*f*(x)	к
2	0	1	1
3	0,05	1,045997	2
4	0,1	1,082961	2
5	0,15	1,109319	2
6	0,2	1,12349	2
7	0,25	1,123917	2
	…	…	…
17	0,75	0,139856	2
18	0,8	-0,05983	2
19	0,85	-0,27311	2
20	0,9	-0,49729	2
21	0,95	-0,72921	2
22	1	-0,96537	1

На основі цих обчислень побудуємо таблицю кратного перерахунку. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C	D
24	№ перерахунку		1	
25	n	s	I	R
26	5	= СУММПРОИЗВ(B2:B7;C2:C7)	= 0,5/A26*B26	
27	10	= СУММПРОИЗВ(F2:F12;G2:G12)	↓	= 1/3*(C27-C26)
28	20	= СУММПРОИЗВ(K2:K22;L2:L22)	↓	↓

Тут у стовпці A n – кількість відрізків, на які вузли інтегрування ділять [0;1] (1/n = h), яка подвоюється згідно з методом кратного перерахунку. У стовпці B інтегральна сума, а у стовпці C – значення інтеграла згідно з узагальненою формулою трапецій. У стовпці D підрахунок оцінки похибки отриманого значення інтеграла згідно з правилом Рунге (1). Оскільки в узагальненої формули трапецій порядок p дорівнює 2, то тут ділимо на $3 = 2^p - 1$. В результаті маємо таку таблицю:

	A	B	C	D
24	№ перерахунку			1
25	n	s	I	R
26	5	5,493444	0,549344	
27	10	11,27574	0,563787	0,004814
28	20	22,69522	0,567381	0,001198

Поклавши n = 5, знаходимо з таблиці: $I_n \approx 0{,}549344$, $I_{2n} \approx 0{,}563787$, $I_{4n} \approx 0{,}567381$; згідно з правилом Рунге $R_{2n}(f) \approx \dfrac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}$, отримуємо з стовпця D $R_{2n}(f) \approx 0{,}004814$, $R_{4n}(f) \approx 0{,}001198$. Як бачимо, із зростанням n, тобто зменшенням кроку h = 1/n $R(f)$ зменшується. Тепер розширимо попередню таблицю направо і проведемо в ній наступні перерахунки. Надамо чарункам таких значень:

	A	B	C	D	E	F	G
24	№ перерахунку		1		2		3
25	n	s	I	R	I	R	I
26	5	*	*				
27	10	*	↓	*	= C27 + D27		
28	20	*	↓	↓	↓	= 1/7*(E28 – E27)	= E28 + F28

Символ * у чарунці цієї таблиці означає, що в ній залишилась та ж сама формула, що була до розширення. Далі у стовпці E знаходимо уточнені значення інтеграла по формулі екстраполяції за Річардсоном (2), тобто значення $I_{n,2n}$ та $I_{2n,4n}$ уже порядку 3. Цим започаткований другий перерахунок, а тому в чарунці F28 обчислюємо оцінку похибки $R_{2n,4n}(f)$ знову за правилом Рунге (1): із зростанням кратності перерахунку на одиницю порядок p теж зростає на одиницю і отже при другому перерахунку p = 3, $2^p - 1 = 7$. Нарешті у чарунці G28 обчислюємо наближене значення інтегралу з залишковим членом порядку 4 за формулою Річардсона. В результаті обчислення в Excel дістаємо таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G
24	№ перерахунку			1		2	3
25	n	s	I	R	I	R	I
26	5	5,493444	0,549344				
27	10	11,27574	0,563787	0,004814	0,568601		
28	20	22,69522	0,567381	0,001198	0,568578	-7,7E-06	0,568571

Як бачимо з чарунці F28, значення $R_{2n,4n}(f)$ насправді значно краще порядку 3: як було показано у доведенні метод гарантує лише не гірші результати. Отже, наближене значення інтеграла в G28 уже навіть порядку 5 (а не 4), як ми розраховували.

Приклад 2. Обчислимо наближене значення функції $f(x) = e^x \sin x$ на відрізку [0;1] за узагальненою формулою Сімпсона з точністю 10^{-8}, для оцінки похибки використавши метод кратного перерахунку.

Оскільки апріорні оцінки тут вимагають значних обчислень і все одно значно завищені, то спочатку візьмемо найменші можливі n = 2, 4, 8, тобто h = 0,5 0,25 0,125 і оцінимо відповідні похибки за методом кратного перерахунку. (Зауважимо, що за узагальненою формулою Сімпсона n обов'язково парне). Надамо чарункам електронної таблиці таких значень:

	A	B
1	x	f(x)
2	0	= EXP(A2)*SIN(A2)
3	= A2 + h	↓
4	↓	↓

В результаті, наприклад, при h = 0,125 отримаємо таку таблицю:

	A	B
1	x	*f*(x)
2	0	0
3	0,125	0,141275
4	0,25	0,317673
5	0,375	0,532923
6	0,5	0,790439
7	0,625	1,093106
8	0,75	1,443029
9	0,875	1,841241
10	1	2,287355

У стовпці С до отриманої таблиці додамо відповідні коефіцієнти Котеса узагальненої формули Сімпсона:

	J	K	L
1	x	*f*(x)	к
2	0	0	1
3	0,125	0,141275	4
4	0,25	0,317673	2
5	0,375	0,532923	4
6	0,5	0,790439	2
7	0,625	1,093106	4
8	0,75	1,443029	2
9	0,875	1,841241	4
10	1	2,287355	1

Аналогічно з двома іншими таблицями:

	A	B	C
1	x	*f*(x)	к
2	0	0	1
3	0,5	0,790439	4
4	1	2,287355	1

	E	F	G
1	x	*f*(x)	к
2	0	0	1
3	0,25	0,317673	4
4	0,5	0,790439	2
5	0,75	1,443029	4
6	1	2,287355	1

На основі цих обчислень побудуємо таблицю кратного перерахунку, ідентичну таблиці прикладу 1:

	A	B	C	D
14	№ перерахунку		1	
15	n	s	I	R
16	2	= СУММПРОИЗВ(B2:B4;C2:C4)	= B16/(3*A16)	
17	4	= СУММПРОИЗВ(F2:F6;G2:G6)	↓	= 1/15*(C17-C16)
18	8	= СУММПРОИЗВ(K2:K10;L2:L10)	↓	↓

Тут у стовпці С – значення інтеграла згідно з узагальненою формулою Сімпсона (12). Оскільки в узагальненої формули Сімпсона порядок p дорівнює 4, то тут ділимо на $15 = 2^p - 1$. В результаті маємо таку таблицю:

	A	B	C	D
14	№ перерахунку			1
15	n	s	I	R
16	2	5,449112	0,908185	
17	4	10,91104	0,909254	7,12176E-05
18	8	21,82382	0,909326	4,81561E-06

Поклавши n = 2, знаходимо з таблиці: $I_n \approx 0{,}908185$, $I_{2n} \approx 0{,}909254$, $I_{4n} \approx 0{,}909326$; згідно з правилом Рунге $R_{2n}(f) \approx \dfrac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}$, отримуємо з стовпця D $R_{2n}(f) \approx$ 7,12176E-05, $R_{4n}(f) \approx$ 4,81561E-06. Як бачимо, отримані наближені значення інтегралу є недостатньо точними. Тому розширимо попередню таблицю направо і проведемо у ній другий перерахунок:

	A	B	C	D	E	F
14	№ перерахунку		1		2	
15	n	s	I	R	I	R
16	2	*	*			
17	4	*	↓	*	= C17 + D17	
18	8	*	↓	↓	↓	= 1/31*(E18 – E17)

Символ * у чарунці цієї таблиці означає, як і раніше, що в ній залишилась та ж сама формула, що була до розширення. Далі у стовпці E знаходимо уточнені значення інтеграла по формулі екстраполяції за Річардсоном (2), тобто значення $I_{n,2n}$ та $I_{2n,4n}$ наступного порядку, в чарунці F18 оцінку похибки $R_{2n,4n}(f)$ знову за правилом Рунге (1). Отже, дістаємо таблицю:

	A	B	C	D	E	F
14	№ перерахунку			1		2
15	n	s	I	R	I	R
16	2	5,449112	0,908185			
17	4	10,91104	0,909254	7,12176E-05	0,909325	
18	8	21,82382	0,909326	4,81561E-06	0,909331	1,88137E-07

Отже, $R_{2n,4n}(f) \approx 1{,}88137 \cdot 10^{-7}$. Порядок похибки зріс на одиницю, проте отримані наближені значення інтегралу все ще є недостатньо точними. Порядок зростає як із зростанням кількості перерахунків, так і з зростанням n. Оскільки всі можливості збільшення кількості перерахунків вичерпані при даних n, то треба покласти n = 16 і провести відповідні додаткові обчислення. При h = 1/16 = 0,0625 отримуємо:

	N	O	P
1	x	*f*(x)	к
2	0	0	1
3	0,0625	0,066488	4
4	0,125	0,141275	2
5	0,1875	0,224845	4
6	0,25	0,317673	2
7	0,3125	0,420219	4
8	0,375	0,532923	2
9	0,4375	0,656203	4
10	0,5	0,790439	2
11	0,5625	0,935975	4
12	0,625	1,093106	2
13	0,6875	1,262067	4
14	0,75	1,443029	2
15	0,8125	1,636086	4
16	0,875	1,841241	2
17	0,9375	2,0584	4
18	1	2,287355	1

Додамо отримані дані у попередню таблицю кратного перерахунку. Маємо:

	A	B	C	D	E	F
14	№ перерахунку			1		2
15	n	s	I	R	I	R
16	2	5,449112	0,908185			
17	4	10,91104	0,909254	7,12176E-05	0,909325	
18	8	21,82382	0,909326	4,81561E-06	0,909331	1,88137E-07
19	16	43,64786	0,90933	3,0651E-07	0,909331	2,85653E-09

Отже, нарешті ми отримали оцінку похибки належного порядку у чарунці F19, задача розв'язана. Це оцінка похибки $R_{4n,8n}(f)$ наближеного значення інтегралу $I_{4n,8n}(f)$, що знаходиться у чарунці E19: $I_{4n,8n}(f) \approx 0{,}909330672$ (таке значення було отримане після розширення стовпця цієї чарунки в Excel). Насправді отриманий порядок знову більший на одиницю гарантованого відповідною теоремою. Ми можемо тепер провести ще третій перерахунок і подивитись на порядок третього уточненого значення:

	A	B	C	D	E	F	G	H
14	№ перерахунку		1		2		3	
15	n	s	I	R	I	R	I	R
16	2	*	*					
17	4	*	↓	*	*			
18	8	*	↓	↓	↓	*	= E18 + F18	
19	16	*	↓	↓	↓	↓	↓	= 1/63*(G19 – G18)

Тут $p = 6$, $2^p - 1 = 63$. В результаті дістаємо:

	A	B	E	F	G	H
14	№ перерахунку			2		3
15	n	s	I	R	I	R
16	2	5,449112				
17	4	10,91104	0,909325			
18	8	21,82382	0,909331	1,88137E-07	0,909331	
19	16	43,64786	0,909331	2,85653E-09	0,909331	-1,53536E-09

Порядок похибки третього уточненого значення не зріс: насправді можна довести, що при зростанні порядку у деякому перерахунку вище гарантованого у наступному перерахунку зростання у наступному, як правило, не відбудеться. Якщо ж стрибків у зростанні порядку перерахунків не відбувається (а це саме так для функцій загального вигляду за теоремою Сарда [6]), то цей порядок зростає лінійно із зростанням n і p одночасно. Отже,

Висновок. Для функцій загального вигляду порядок уточненого значення інтеграла при перерахунках кратним методом зростає білінійно із зростанням порядку узагальненої формули p і числа кроків n. Ефективність такого методу є найкращою можливою за цими параметрами.

Висновок про ефективність насправді розповсюджується на всі функції, оскільки вони є границями функцій загального вигляду [7].

Перспектива подальших досліджень.

Оскільки метод подвійного перерахунку узагальнюється на випадок кратних інтегралів та для розв'язання диференціальних рівнянь [2], то природно було б розповсюдження на ці задачі також і методу кратного перерахунку. Його відповідність для таких задач фактично не викликає сумніву, проте доведення методу значно ускладнюється.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Н. С. Бахвалов Численные методы т. 1. / – М.: "Наука", 1973. – 631 с.
2. М. Я. Лященко, М. С. Головань Чисельні методи К.: "Либідь", 1996 – 285 с.
3. http://forum.ixbt.com – «Быстрое отображение векторной графики. Алгоритмы»
4. http://gis-lab.info – «GIS-Lab - Географические информационные системы и дистанционное зондирование». 2002-2010
5. И. С. Березин, Н. П. Жидков Методы вычислений т. 1. / – М.: "Наука", 1966. – 632 с.
6. В. И. Арнольд Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. / – М.: "Наука", 1978. – 302с.
7. М. Рид, Б. Саймон Методы современной математической физики т.1. / М: Мир, 1977. 358 с.