УДК 621.37:519.6

ПРОЦЕДУРА УСЕРЕДНЕННЯ У МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Валько Н.В.
Херсонський державний університет

В роботі показано роль зваженого усередненняусереднення у різних обчислювальних методах. Показано зв'язок між різними методами на основі усереднення.

Ключові слова: математичне моделювання, зважене усереднення, вагові коефіцієнти;

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.

Процедура усереднення має глибокі традиції і має багато інтерпретацій: середнє арифметичне, середнє геометричне, середнє квадратичне, середнє гармонічне та ін. Найбільш популярним є арифметичне усереднення. Вже в перших видатних роботах з теорії ймовірностей і математичної статистики вивчалося арифметичне середнє статистичної вибірки і росло розуміння його важливості. Для оцінки стратифікованої вибірки стали використовувати більш тонкий прийом – зважене усереднення. Цей прийом був відомий ще Архімеду і використовувався при розв'язуванні багатьох задач геометрії та механіки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Прикладами зваженого усереднення можуть слугувати: усереднення і схеми Кранка-Ніколсон, методу сіток для рівнянь параболічного типу; інтегральна формула Пуассона і усереднення граничних потенціалів в крузі; усереднення і формули наближеного інтегрування; інтегральний критерій гармонічності функції і усереднення.

Було встановлено [1-6], що ідеї усереднення присутні у багатьох чисельних методах. Зокрема розрахункова формула, такого популярного методу, як метод скінченних різниць (МСР) представляє собою середнє арифметичне у випадку квадратної сітки, середнє зважене у випадку прямокутної сітки та адаптованого шаблону. Метод скінченних елементів (МСЕ) також використовує усереднення при побудові інтерполяційного поліному на окремому елементі. В схемах випадкових блукань методу Монте-Карло теж використовується зважене усереднення. Це дає можливість для створення нових моделей і методів.

Виклад основного матеріалу дослідження

Методологія зваженого усереднення містить набір принципів і прийомів вдосконалення математичної моделі на основі зважування ординарних моделей. В результаті такого зважування нова модель стає кращою, точнішою.

Побудова математичної моделі найчастіше починається з лінеаризації явища. Майже всі реальні залежності є нелінійними. В багатьох таких випадках припущення про їх лінійність є найпростішим, і тому природно почати з цього припущення – особливо якщо інформація про справжній характер залежності недостатня. Окрім того, таке припущення часто має задовільну, або достатньо високу ступінь адекватності. Ця обставина дозволяє застосовувати лінійні схеми навіть тоді, коли є серйозні причини очікувати, що реаальна залежність значно відрізняється від лінійної. У цьому випадку вважається, що нелінійність не суттєво вплине на результат, або існує можливість задовільної компенсації похибки шляхом належного вибору коефіцієнтів лінійної залежності. Крім того, завжди існує можливість подальшого уточнення отриманого наближеного розв'язку.

Один із шляхів покращення моделі – це усереднення ординарних математичних моделей. При цьому використання зваженого усереднення допомагає підвищити чутливість моделі та надати їй гнучкості.

Самим простим прикладом зваженого усереднення є лінійна інтерполяція функції в формі Лагранжа:

$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}f_a+\frac{x-a}{b-a}f_b=\xi_a\cdot f_a+\xi_b\cdot f_b,$$

де a, b – вузли інтерполяції, f_a, f_b – вузлові значення функції, ξ_a, ξ_b – коефіцієнти Лагранжа (вагові коефіцієнти). Вагові коефіцієнти слідкують за розташуванням точки x і відповідно змінюють своє значення.

В двовимірному випадку лінійна інтерполяція здійснюється на симплекс-елементі (трикутнику) з трьома вузлами у вершинах за формулою:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\xi_i(x,y)\cdot f_i,$$

де f_i – вузлові значення функції, ξ_i – барицентричні координати двовимірного симплекса. Барицентричне усереднення отримало широке застосування і у методі скінченних елементів.

В загальному випадку для визначення вагових коефіцієнтів інтерполяції вищого порядку дискретний елемент з N вузлами можна представити у вигляді композиції простих елементів, поєднаних у вибраному вузлі і. Тоді достатньо перемножити лінійні вагові функції, щоб отримати вагу N_i для вузла і. Інтерполяційний поліном при цьому має вигляд зваженого усереднення:

$$f=\sum_{i=1}^{N}N_i\cdot f_i,$$

де N_i залежать від барицентричних координат симплекса. Таке усереднення вузлових параметрів є типовим для будь-яких дискретних елементів.

Дискретна модель рівняння Лапласа на квадратній сітці у методі скінченних різниць представляє собою усереднення по чотирьом суіднім значенням:

$$u_{i,j}\approx\frac{1}{4}\left(u_{i,j-1}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i+1,j}\right).$$

З іншого боку, цей шаблон можна розглядати, як суперпозицію двох триточкових шаблонів:

$$u(M_0)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{u_1+u_3}{2}+\frac{u_2+u_4}{2}\right),$$

де uk=u(Mk), k=1, ..., 4 .

Порівняння розрахункових формул методу скінченних різниць з розрахунковою формулою статистичного методу Монте-Карло дає можливість інтерпретації шаблону МСР, як маршрутів блукання частинки по вузлах решітки. Розповсюдження різних схем маршрутизації по квадратній, прямокутній, трикутній рішітці дає можливість побудови різних шаблонів випадкових блукань частинки, а зважене усереднення маршрутів у дискретному елементі веде до побудови нових моделей.

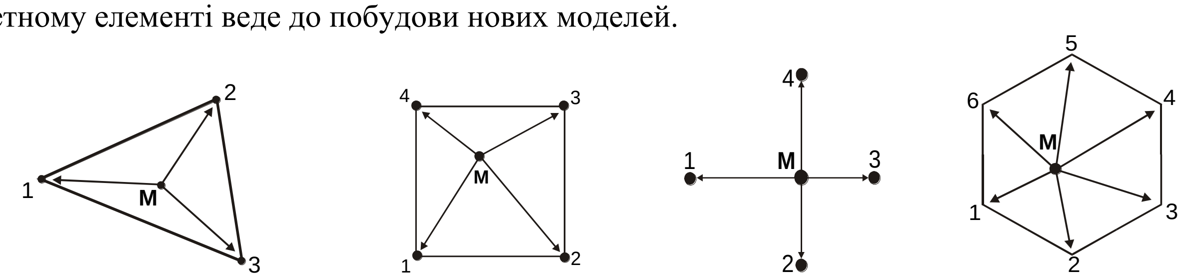

Рис. 1. Схеми випадкових блукань
(тримаршрутна схема; чотиримаршрутні схеми; шестимаршрутна схема)

Одним з недоліків сіткових методів є регулярне розташування вузлів і довгі блукання по вузлам решітки. Цього можна уникнути використавши у якості перехідних ймовірностей барицентричні координати точки в середині дискретного елементу. В цьому випадку моделюється стрибок блукаючої частинки на границю області.

Використання барицентричних координат у схемах випадкових блукань дозволяє довільно розмістити точку всередині дискретного елементу, а вершини розрахункового шаблону розташовують на границі досліджуваної області.

Висновки з даного дослідження та перспективи подальших розвідок у даному напрямі

Отже процедура усереднення має універсальний характер і є надійним засобом вдосконалення обчислювальної моделі. Широке застосування зваженого усереднення обумовлене передусім існуванням глибоких зв'язків між різними методами дискретизації. Дослідження цих зв'язків є перспективним напрямком розвитку обчислювальних методів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Хомченко А.Н. Інтеграл Пуассона та ймовірнісні підходи до усереднення граничних потенціалів. // Інтегр. перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – К.: Ін-т математики НАНУ, 1996. – Вип. 10 – С. 232-234.
2. Камаева Л.И., Сеничак В.М., Хомченко А.Н. Ускоренные алгоритмы метода Монте-Карло решения задач Дирихле для уравнения Пуассона. // Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1992. – 24 с.
3. Хомченко А.Н. Вероятностные аспекты дискретизации в задачах математической физики. // Прикл. матем и матем. моделирование. – Херсон: ХГТУ, 1997. – С. 9-12.
4. Хомченко А.Н. Вероятностные свойства кубических сплайнов. // Прикладные проблемы математического моделирования. - Вестник ХГТУ. – Херсон: ХГТУ, 1999. – С. 177-179.Хомченко А.Н., Хомченко Б.А. Геометрия «блужданий по симплексам». // Сб. тр. IV межд. конф. «Соврем. проблемы геом.моделирования». – Мелитополь: ТГАТА, 1997. – С. 36-39.
5. Хомченко А.Н., Валько Н.В., Литвиненко Е.И. Сглаженное усреднение граничных потенциалов на сирендиповых элементах. // Науково техн. журнал "Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы" - 2004.- №2(14). – С. 79-81.
6. Хомченко А.Н., Наджафов М.Т., Валько Н.В. Две модели усреднения граничных потенциалов на адаптируемом шаблоне. // Геометричне та комп'ютерне моделювання: - Харків: Харк. держ. університет харчування та торгівлі 2004. - № 8. – С.26-31.
7. Валько Н.В., Литвиненко О.І., Хомченко А.Н. Дискретні моделі зваженого усереднення граничних потенціалів // Вісник ХНУ, Вип.4. – Харьків: ХНУ, 2005, - № 661. – С.53-60.

Рецензент: Кравцов Г.М.