УДК 517.987

АЛГОРИТМ ПОИСКА АТТРАКТОРА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОБЩЕГО ВИДА.

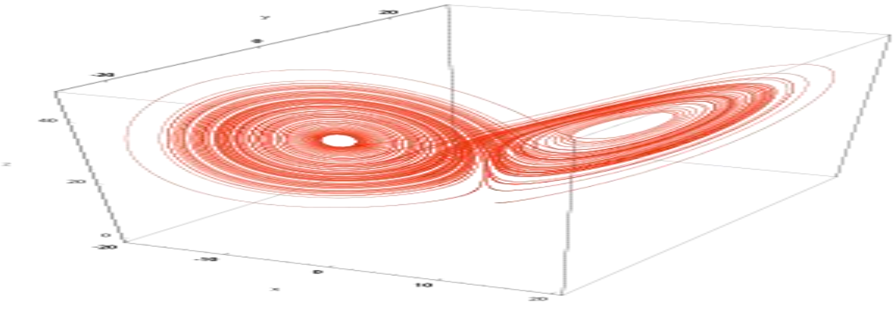
Вейцблит А. И.
Херсонский государственный университет

В статье представлен алгоритм, позволяющий эффективно найти аттрактор любой динамической системы с учётом её неустранимых случайных флуктуаций.

Ключевые слова: *исследование, вычисление, динамика, алгоритм, аттрактор, флуктуация.*

Одной из основ учебного курса “Методы вычислений” является изучение динамики обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида, т.е. изучение зависимости их решений от аргумента t [1]. Эти исследования важны в радиофизике, макроэкономике, химической кинетике, популяционной биологии и других дисциплинах [2], [3]. Такая задача требует значительного объёма вычислений, что и реализует представленный далее алгоритм. Основная идея, на которой он основан – изначально учитывать случайные флуктуации, которые всегда являются неотъемлемой составляющей реальной динамики. Точнее говоря, предполагается, что на динамику, задаваемую данным дифференциальным уравнением, накладывается случайный “белый шум” [2] с заданной дисперсией d за время шага Δt. В совокупности такая динамическая система является марковским каскадом [4], [5], она сколь угодно точно аппроксимируется марковской цепью, а для динамики, заданной на компакте, конечной марковской цепью. Это довольно простая структура, для которой можно строить эффективные алгоритмы исследования конкретных систем и существует ясная общая структурная теория. При $d \to 0$ все результаты, полученные для марковских цепей, равномерно сходятся к соответствующим результатам для заданного марковского каскада.

Первоочередная задача – найти аттрактор динамической системы. Аттрактор – это ключевое понятие теории динамических систем. Физический смысл аттрактора в том, что это “пространство установившихся режимов” [6]. В простых традиционных примерах аттракторы представляют собой объединение конечного числа неподвижных точек фазового пространства и замкнутых кривых, на которых происходят циклические процессы. Однако главный интерес представляют очень сложно устроенные так называемые “странные аттракторы” [2], [3]. На рисунке изображён такой пример [7] – трёхмерный аттрактор системы Лоренца, используемой в метеорологии. Это фрактал [8], имеющий дробную размерность с чрезвычайно сложной турбулентной динамикой, в значительной степени объясняющей трудности предсказания погоды.



Важно то, что для любой марковской цепи её аттрактор определён однозначно. При $d \to 0$ эти аттракторы равномерно сходятся к аттрактору заданного марковского каскада. Формально указанная аппроксимация и оценки сходимости описываются следующими утверждениями.

Определение 1. Пусть Δ_i – это ячейки некоторого разбиения фазового пространства данной динамической системы диаметром ε. Тогда дискретизацией марковского каскада с переходной функцией P(y, A) и начальным абсолютно непрерывным состоянием μ_0 будем называть марковскую цепь H с вероятностями перехода из Δ_i в Δ_j равными p_{ij} = $\frac{1}{\mu_0(\Delta_i)} \int\limits_{y \in \Delta_i} P(y, \Delta_j)\, d\mu_0$ и начальными значениями $p_i = \mu_0(\Delta_i)$.

Пусть $P(\mu_t) = \mu_t(H) = \mu_{t+\Delta t}$ в момент времени $t + \Delta t$, $\mu_t \big|_{t=0} = \mu_0$.

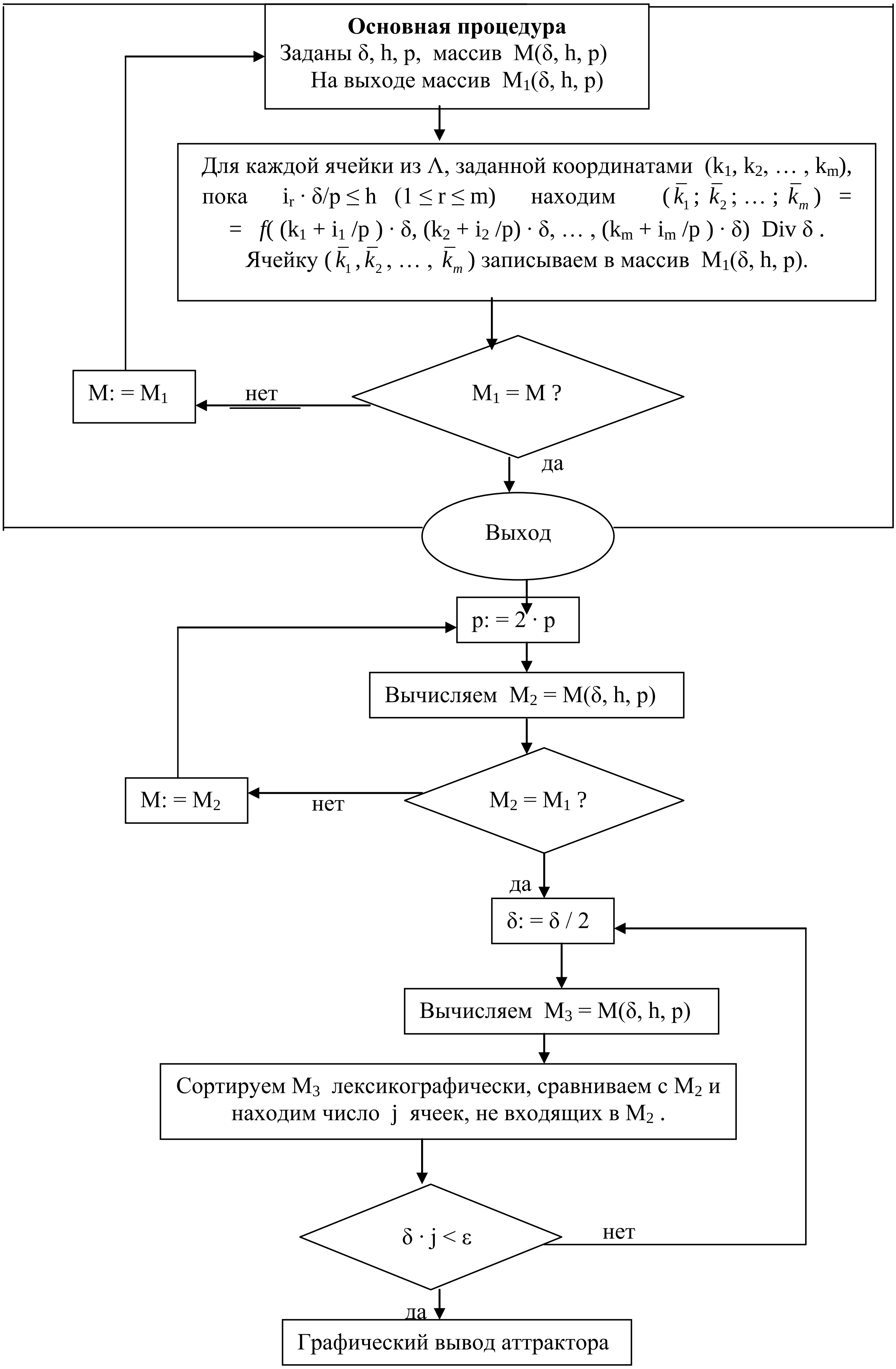
Утверждение 1. При всех достаточно малых ε распределение μ_t в момент времени t и распределение её дискретизации μ^{Δ}_t в это время отличаются друг от друга лишь на величину порядка ε: $\left|\varphi(\mu_t) - \varphi(\mu_t^{\Delta})\right| < A\varepsilon \quad (0 \le t < \infty)$, где φ – произвольная “наблюдаемая“, т. е. непрерывная ограниченная функция на M, A –константа, задаваемая данной динамической системой.

Утверждение 2. Аттрактор дискретизации марковского каскада с ячейками диаметром ε равномерно сходится к аттрактору самого марковского каскада при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, и для заданного марковского каскада аттрактор определён безальтернативно. Как и для конечной марковской цепи этот аттрактор состоит, вообще говоря, из нескольких непересекающихся инвариантных (базисных) подмножеств, а базисные множества из связных непересекающихся подмножеств, циклически переставляемых динамикой марковского каскада. (Можно показать, что именно эта циклическая структура и объясняет явление спина в квантовой механике [9]). Утверждение 2 в частности означает, что при достаточно малых ε стабилизируется число связных компонент аттракторов соответствующих дискретизаций, а их притягивающие области будут изменяться непрерывно с уменьшением ε.

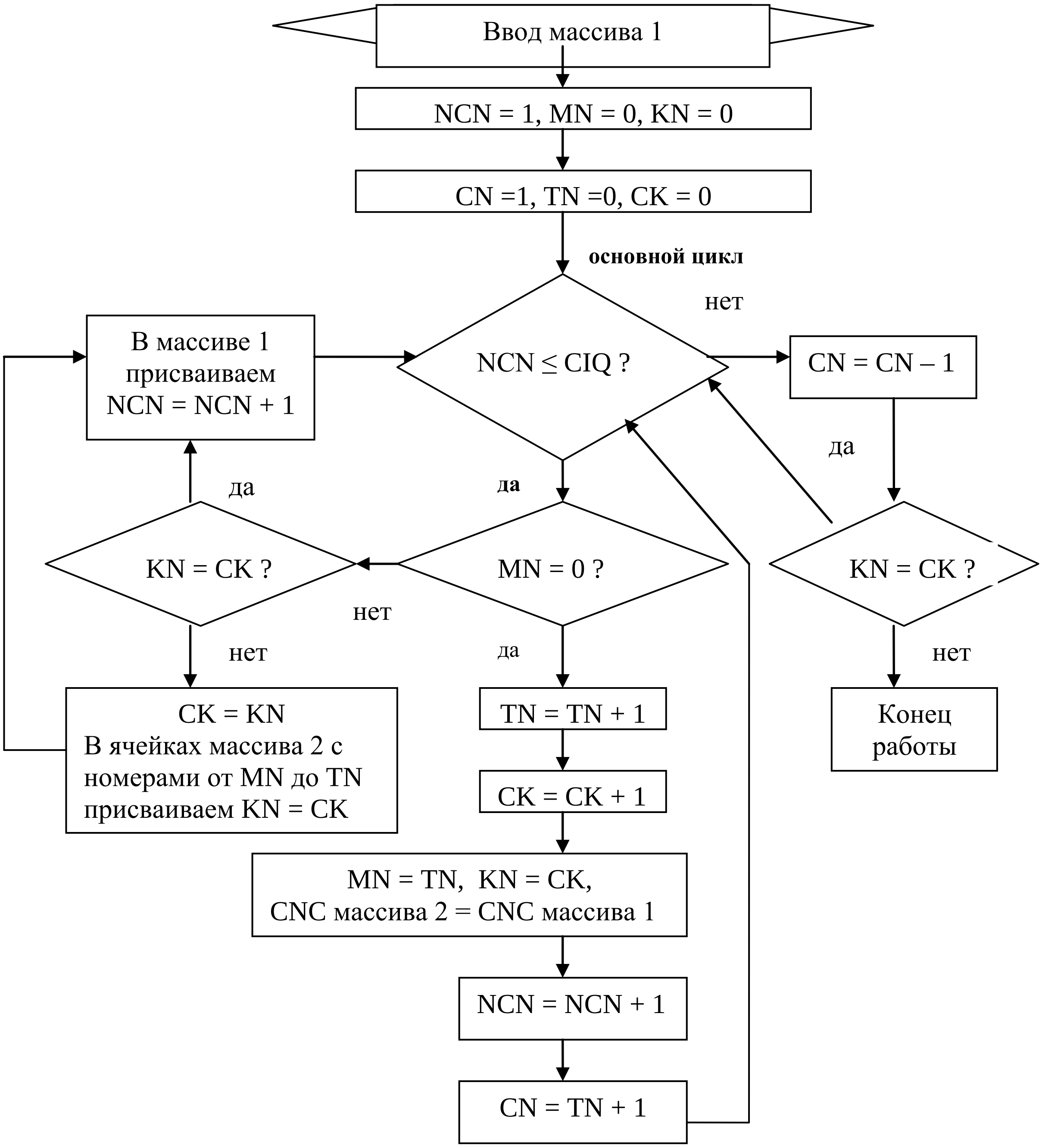
Рассмотрим алгоритм поиска аттрактора марковского каскада с заданной точностью ε. Пусть задано разбиение фазового пространства на ячейки Δ_i диаметром $\le \varepsilon / A$, где A – это константа из утверждения 1. На множестве ячеек Δ_i дискретизация марковского каскада индуцирует символическую динамику (в данном случае, очевидно, это динамика топологической марковской цепи, для которой ячейки Δ_i являются состояниями). На пространстве состояний Δ_i вводится транзитивное отношение квазипорядка: $\Delta_i \prec \Delta_j$, если существует некоторая траектория символической динамики из Δ_i в Δ_j. Состояние Δ_i называется возвратным, если $\Delta_i \prec \Delta_i$. Возвратные состояния разбиваются на классы эквивалентности: $\Delta_i \sim \Delta_j \Leftrightarrow \Delta_i \prec \Delta_j \prec \Delta_i$. Тогда аттрактор марковского каскада с точностью ε состоит из классов эквивалентности возвратных состояний. Таким образом, если $\Omega = \{\Delta_i\}$– это всё фазовое пространство ε – дискретизации H заданного марковского каскада, т.е. совокупность всех ячеек диаметром $\le \varepsilon / A$, то $H(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset H^3(\Omega) \supset \ldots \supset H^n(\Omega)$. А если $H^n(\Omega) = H^{n+1}(\Omega)$, то $H^n(\Omega)$ – это аттрактор ε – дискретизации марковского каскада, т.е. это аттрактор самого марковского каскада с точностью ε.

На этом и основан алгоритм. Предполагается, что исходная динамика задаётся разностным уравнением $x_{n+1} = f(x_n)$, где x_n – точка исходного фазового пространства. (После описания основного алгоритма будет изложен способ перехода от заданного обыкновенного дифференциального уравнения к используемому здесь разностному). Кроме того, заданы изначально параметры ε, как критерий оценки точности сходимости аттрактора дискретизации к аттрактору самого марковского каскада, и d – дисперсия случайных флуктуаций или h = $\sqrt{d}$ – их среднеквадратичное отклонение. С целью определения динамики марковской цепи – дискретизации заданного марковского каскада – в каждой ячейке Δ_i по решётке p^m её точек x_j (где p – некоторое натуральное число, m – размерность фазового пространства) найдём $y_j = f(x_j)$. И тогда ячейка $\Delta_k \in H(\Delta_i)$, если $y_j = f(x_j) \in \Delta_k$ для некоторой точки $x_j \in \Delta_i$. Начальные значения числа p и длина стороны ячейки δ предполагаются в начале заданными, а далее уточняются. Основная процедура по массиву M(δ, h, p) занумерованных ячеек из некоторого их набора Λ находит массив


Основная процедура
Заданы δ, h, p, массив M(δ, h, p)
На выходе массив M_1(δ, h, p)
Для каждой ячейки из Λ, заданной координатами ($k_1, k_2, \ldots, k_m$),
пока $i_r \cdot \delta/p \le h$ $(1 \le r \le m)$ находим $(\bar{k}_1; \bar{k}_2; \ldots; \bar{k}_m) =$
$= f((k_1 + i_1/p)\cdot\delta, (k_2 + i_2/p)\cdot\delta, \ldots, (k_m + i_m/p)\cdot\delta)$ Div δ .
Ячейку $(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_m)$ записываем в массив M_1(δ, h, p).
M: = M_1
нет
M_1 = M ?
да
Выход
p: = 2 · p
Вычисляем M_2 = M(δ, h, p)
M: = M_2
нет
$M_2 = M_1$?
да
δ: = δ / 2
Вычисляем M_3 = M(δ, h, p)
Сортируем M_3 лексикографически, сравниваем с M_2 и
находим число j ячеек, не входящих в M_2 .
δ · j < ε
нет
да
Графический вывод аттрактора

$M_1(\delta, h, p)$, содержащий все ячейки из набора $H(\Lambda)$. Если $H(\Lambda) \neq \Lambda$, то находим $H^2(\Lambda)$, $H^3(\Lambda)$, … . Если $H^n(\Lambda) = H^{n+1}(\Lambda)$ при некотором n, то соответствующий $H^n(\Lambda)$ массив $M_1(\delta, h, p)$ является выходным. Далее следует принципиальная блок – схема алгоритма. В её обозначениях x_r – это r – я координата фазового пространства $(1 \le r \le m)$. Каждая ячейка задаётся набором m целочисленных координат k_r, так что некоторая крайняя точка этой ячейки имеет координаты $x_r = \delta \cdot k_r$ (при m = 2 это её левая нижняя точка).

В таком простейшем виде этот алгоритм не эффективен: хотя целью является аттрактор, но обрабатываются все без исключения ячейки из фазового пространства. Поэтому далее предлагается и усовершенствованный подход, позволяющий обрабатывать только ячейки, расположенные на траектории от начальной ячейки к аттрактору.



Действительно, минимально возможная оценка числа t операций это $t \le N \cdot H \cdot n$, где N – число всех ячеек фазового пространства, n – число классов эквивалентности возвратных состояний ячеек, H – максимум числа ячеек в образе $H(\Delta_i)$, Δ_i пробегает фазовое пространство. Даже оценка числа операций снизу не лучше, чем $t \ge A \cdot H \cdot n$, где A – число ячеек на аттракторе. В принципиальной блок – схеме более эффективного алгоритма предполагается, что количество ячеек CIQ, в которые можно попасть из ячейки Δ_i этой траектории за один шаг и список этих ячеек вычисляются в соответствии с раннее приведённым алгоритмом. Итак, пусть рассматриваемую символическую динамику на множестве состояний Δ_i задаёт следующий

Массив 1:

1. Номер ячейки – CNC (т.е. для ячейки Δ_i CNC = i).
2. Количество ячеек, в которые можно попасть из ячейки CNC по некоторой траектории символической динамики за один шаг – CIQ.
3. Список этих ячеек – ICL.
4. Номер первой из них, ещё не рассмотренной программой – NCN.
5. Номер ячейки CNC в следующем массиве 2, ставящем ячейке в соответствие её класс эквивалентности возвратных состояний – MN.

Массив 2:

1. Номер ячейки в массиве – MN.
2. Номер класса этой ячейки – KN.
3. Номер этой ячейки в массиве 1 – CNC.

Кроме того, используются следующие переключатели: 1) CN – текущий номер рассматриваемой ячейки 2) общее число ячеек, уже рассмотренных программой – TN; 3) текущий номер класса – CK. Тогда следующая блок – схема описывает алгоритм программы, которая по заданному массиву 1 получает в массиве 2 некоторый класс эквивалентности возвратных состояний, содержащийся тем самым в аттракторе ДКМ с точностью ε – это все ячейки массива, для которых значение KN максимально.

Теперь покажем, как перейти от непрерывной динамики, задаваемой данной системой дифференциальных уравнений, к динамике марковского каскада, задаваемой разностными уравнениями. Этот вывод будет производиться из единственного предположения, которое сформулировано в начале статьи. А именно предполагается, что на динамику, задаваемую данным дифференциальным уравнением, накладывается неустранимый случайный "белый шум" с заданной дисперсией.

Заметим: физики давно знают подлинную причину квантовых эффектов. Она в том, что невозможно измерять точнее, чем это допускают размеры и тепловое движение атомов, из которых состоят измерительные приборы. Не удивительно поэтому, что получаемая далее динамика тесно связана с квантовой. Можно однако строго доказать, что хотя традиционно квантовые системы описывают математически не марковскими каскадами, а уравнениями в частных производных, однако для основных примеров эти два подхода эквивалентны.

Итак, пусть p(x) – это n – мерное гладкое векторное поле на n – мерном гладком римановом многообразии M, где $x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ – локальные евклидовы координаты на M, $p_i(x) \in C^\infty(R^n)$ (i = 1, …, n)). На каждой фазовой кривой x(t) ∈ M динамической системы, порожденной этим векторным полем:

$$\frac{dx_i}{dt} = p_i(x) \qquad (i = 1,\ldots, n) \qquad (1)$$

рассмотрим интеграл "укороченного действия" $s(t) = \int\limits_{x(t)} p(x)dx = \int\limits_0^t \|p(\tau)\|^2 d\tau$, где $\|p(\tau)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^n p_i^2(\tau)$. Величина s(t) на каждой кривой x(t), отличной от неподвижной точки, диффеоморфно выражается через t и называется "оптическим временем". Пусть ρ – такая метрика, что $s(t) = \int\limits_{x(t)} d\rho$: $d\rho = \|p(t)\|^2 dt$. Расстояние d, пройденное точкой за время Δt по траектории равно $d = \int\limits_0^{\Delta t} \|p(\tau)\| d\tau = \|p(t_c)\| \cdot \Delta t$, где $p_c = p(t_0)$ - среднее значение $(0 \le t_0 \le \Delta t)$.

(Конечно, это при условии однократного обхода траектории за время Δt, точки поворота – особый случай: в квантовой механике они учитываются с помощью индекса Морса; для экономических циклов это особо сложный случай, зависящий решающим образом от внешних (экзогенных) параметров динамической системы). Теперь мы предполагаем, что флуктуации порождают "белый шум" ξ(t), действующий на конфигурационном пространстве с дисперсией Dξ(t) = σ^2t, где коэффициент диффузии σ^2 предполагается константой на рассматриваемом промежутке времени. Тогда должно пройти некоторое время Δt, пока точка сместится на такое расстояние d от исходного положения, которое превысит среднеквадратичную ошибку, вызванную ξ(t) за время Δt, т.е. $\|p_c\|\Delta t$ превысит $\sqrt{\sigma^2\Delta t}$. При таком минимальном Δt $\|p_c\|\Delta t = \sigma\sqrt{\Delta t}$, откуда $\sigma^2 = \|p_c\|^2\Delta t$ и, следовательно,

$$\Delta t = \frac{\sigma^2}{\|p_c\|^2}, \qquad d = \|p_c\|\Delta t = \frac{\sigma^2}{\|p_c\|} \qquad (2).$$

Здесь, по предположению, Δt – тот минимальный промежуток времени, по истечении которого появляется возможность произвести новое измерение, отличие которого от прежнего превысит погрешность, т.е. произвести значимо отличное измерение. Вследствие (2) $\sigma^2 = \|p_c\|^2\Delta t \approx \int_0^{\Delta t}\|p(\tau)\|^2 d\tau = s(\Delta t)$. Таким образом, вдали от точек поворота 1) временной промежуток между ближайшими значимыми измерениями неизменен всюду по шкале оптического времени и равен σ^2. (Другими словами расстояние между ними по метрике ρ равно σ^2). 2) За это время "белый шум" ξ(t) порождает неустранимую случайную погрешность, среднеквадратичное отклонение которой равно d – расстоянию по траектории между ближайшими измерениями.

Итак, в качестве динамической квантовой модели (ДКМ) для данной динамической системы следует взять такую, которая каждую точку сначала сдвигает по фазовой кривой данной динамической системы за оптическое время порядка σ^2 (или на ρ – длину σ^2), а затем случайным образом смещается на длину, в среднем равную расстоянию по траектории от исходной до новой точки.

Пример. Пусть динамическая система задаётся разностным уравнением $\Delta x(t+1) = f(x(t))$, где Δx(t + 1) – смещение по переменной x за единичное время от момента t до t + 1. Соответствующий дифференциальный аналог $\dot{x} = f(x)$; пусть $f(x) = U'(x)$. Если x_0 – локальный максимум потенциала U ($U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) < 0$), то x_0 – устойчивая неподвижная точка данного уравнения. Если x – это объём производимой продукции, а U(x) – прибыль предпринимателя при таком объёме, то эта динамическая система (крайне упрощённо) описывает [10], поведение максимизирующего прибыль предпринимателя. Теперь проквантуем эту динамическую систему, т. е. учтём неизбежные флуктуации. Эти флуктуации вызываются не только случайными отклонениями внешних (экзогенных) параметров, но и стремлением субъектов рынка учесть его динамику. Так если текущий рост равен Δx(t), то при его учёте естественно в уравнение для Δx(t+1) подставить не текущий доход x(t), а x(t) + γΔx(t), где γ ≥ 0 характеризует степень учета динамики (от игнорирования при γ = 0 до γ ≈ 1 при полном учёте). Тогда $\Delta x(t+1) = f(x + \gamma\cdot\Delta x(t))$, откуда $\Delta x(t+1) = k\cdot\Delta x(t) + f(x(t))$, где $k \approx \gamma\cdot f'(x)$ – "акселератор". При k = 1 получаем уравнение $\Delta x(t+1) = \Delta x(t) + f(x(t))$, а $x''(t) = f(x) = \frac{dU(x)}{dx}$ – соответствующий дифференциальный аналог – это консервативное уравнение с гамильтонианом $\frac{1}{2}(x')^2 + U(x)$. В общем случае уравнение диссипативно, а при k > 1 точка x_0 неустойчива, но в любом случае теперь решением является не неподвижная точка, а фазовая кривая, т.е. квантование привело к переходу от стационарного поведения к динамическому. Именно такова причина возникновения экономических циклов в реальных моделях [11].

В заключение рассмотрим ДКМ, как случайный процесс X(t, ω), где t – время, ω = (x; η), x є M (фазовому многообразию), η = η(t,x) є M – произвольное гладкое поле на R×M, по смыслу малое случайное отклонение на M, вызванное “белым шумом”: для данного η при каждой итерации в момент t динамика ДКМ задаётся диффеоморфизмом G(x) + η(t,x). Гладкая реализация ДКМ – это по определению последовательность диффеоморфизмов $G_1(x) = G(x) + \eta(t_1,x)$, … , $G_n(x) = G(x) + \eta(t_n,x)$, … , где $t_1, \dots, t_n, \dots$ – моменты итераций, η фиксировано и однозначно задаёт данную гладкую реализацию. Каждому $x = x_0$ є M гладкая реализация ДКМ однозначно ставит в соответствие траекторию: $x_1 = G_1(x_0)$, $x_2 = G_2(x_1)$, … , $x_n = G_n(x_{n-1})$, … и случайный процесс $X(t_n,x_0, \eta) = x_n = G_n(x_{n-1})$. Таким образом, ДКМ X(t, x, η) расслаивается на гладкие реализации, однозначно задаваемые полем η(t, x). А элемент ω = (x, η) однозначно задаёт траекторию с началом в x для гладкой реализации, заданной полем η.

Напомним, что неравномерно полной гиперболической системой (НПГ-системой) называют динамическую систему с ненулевыми показателями Ляпунова для полной (по Лебегу) меры точек её фазового пространства [4].

Утверждение 3. Для полной меры гладких сечений ДКМ с точностью порядка h в период времени $0 < t < \frac{1}{h}$ для достаточно малых h каждое базисное множество аттрактора раскладывается в прямое произведение подмногообразия с НПГ – динамикой и нейтрального подмногообразия, на котором динамика устойчива по Ляпунову.

Таким образом, общего вида аттрактор ДКМ в некотором смысле устойчив: на нейтральном подмногообразии по Ляпунову, а на дополнительном при малых гладких возмущениях, т.е. структурно. Так как данную в опыте реальность в действительности описывает ДКМ, то для классической системы более сложная структура и, как следствие, отсутствие предела её ДКМ означает, что она не является адекватной, “не имеет физического смысла”. Отсюда **вывод:** предложенный в этой статье алгоритм позволяет эффективно исследовать на компьютере динамику произвольных динамических систем общего вида, т.е. любых реальных систем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Н. С. Бахвалов Численные методы т. 1. / – М.: “Наука”, 1973. – 631 с.
2. Ю. И. Наймарк, П. С. Ланда Стохастические и хаотические колебания / – М.: “Наука”, 1987. – 423 с.
3. В. И. Арнольд Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. / – М.: “Наука”, 1978. – 302с.
4. Современные проблемы математики. Динамические системы – 2./ – М.: ВИНИТИ, 1985. – 312 с.
5. Р. Боуэн Методы символической динамики / М: Мир, 1989. – 540 с.
6. Milnor J. On the concept of attractor. /Commune. Math. Phys., 1995 – 99 – № 2, p. 177 – 196
7. В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников О возникновении и структуре аттрактора Лоренца / ДАН СССР, 1977 – т. 234 – № 2, с. 336 – 339
8. Lanford O. E. Computer Pictures of the Lorenz Attractor / Lect. Notes in Math., 1997 – № 615, p. 113 – 116
9. Л.Д. Фаддеев, О.А. Якубовский Лекции по квантовой механике / Л: Издательство ленинградского университета, 1980. – 198 с.
10. Бенинга Ш. Финансовое моделирование с использованием EXCEL – М: “Вильямс”, 2007. – 592с.
11. М. Хаертфельдер, Е. С. Лозовская, Е. Хануш Фундаментальный и технический анализ рынка ценных бумаг. – СПб.: “Питер”, 2004. – 478с.

Рецензент: Львов М.С.