УДК 37.014.5: 37.014.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ BONUS-MALUS СИСТЕМЫ З ЧАСТОТНОЙ И ВЕСОВОЙ КОМПОНЕНТАМИ

Клесов А.О.
Институт прикладного системного анализа, НТУУ «КПИ»

Бонус – малус системы уже давно используются в странах Европы и Азии. Каждый клиент страховой компании определяется в некоторый класс. В соответствии с этим, для него определяется размер страховой премии. В зависимости от частоты и объёма страховых выплат, клиент переходит из класса в класс, и либо получает дисконт на размер страховой премии (бонус класс), либо штрафуется (малус класс). В работе предложена математическая модель бонус – малус системы. С помощью возможностей языка программирования C++ было проведено моделирование и оценивание значений частотной и весовой компонент бонус – малус системы, при которых компания получает наибольшую финансовую прибыль. Для моделирования был написан специальный датчик случайных чисел, который может быть использован в дальнейших исследованиях.

Ключевые слова: *бонус-малус, страхование, страховая премия, матрица транзакций, страховые выплаты.*

Вступление

Bonus-malus системы широко применяются в странах Европы и Азии. Основная суть таких систем состоит в том, что для каждого страхователя, в зависимости от частоты и размера страховых исков, определяется некоторый бонус-малус класс. В зависимости от того, в каком классе находится клиент, определяется размер страховой премии на следующий период – либо увеличивается, либо уменьшается.

Существуют такие бонус-малус системы, которые учитывают только количество страховых случаев год, не принимая во внимание размер каждого страхового случая. В таком случае, для перехода из класса в класс, используется матрица транзакций.

В качестве примера рассмотрим такую матрицу транзакций:

Таблица №1

Матрица *транзакций*

Класс	0 Исков	1 Иск	2 Иска	3 Иска	4 Иска	≥ 5 Исков
22	21	22	22	22	22	22
21	20	22	22	22	22	22
20	19	22	22	22	22	22
19	18	22	22	22	22	22
18	17	22	22	22	22	22
17	16	21	22	22	22	22
16	15	20	22	22	22	22
15	14	19	22	22	22	22
14	13	18	22	22	22	22
13	12	17	22	22	22	22
12	11	16	21	22	22	22
11	10	15	20	22	22	22
10	9	14	19	22	22	22
9	8	13	18	22	22	22
8	7	12	17	22	22	22
7	6	11	16	21	22	22
6	5	10	15	20	22	22
5	4	9	14	19	22	22
4	3	8	13	18	22	22

3	2	7	12	17	22	22
2	1	6	11	16	21	22
1	0	5	10	15	20	22
0	0	4	9	14	19	22

Подобные системы являются в некотором роде «нечестными», поскольку не учитываю объем выплат по каждому страховому случаю. Поэтому целью данной работы будет моделирование бонус-малус системы, которая учитывала бы обе компоненты и эмпирическая оценка ее параметров. Критерием оптимальности будет выступать финансовый баланс компании.

С целью выделить каждую компоненту (частоту и тяжесть страховых случаев), предполагается, что количество исков каждого страхователя независимо от тяжести каждого иска.

1.1. Частотная компонента

Будем считать, что страховой портфель гетерогенный [см. 3] и все страхователи имеют постоянную, но различную, величину основных рисков аварии. Будем считать, что количество исков *k*, с учетом параметра λ, распределено по закону Пуассона:

$$P_\lambda(k\,|\,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

$k = 0,1,2,3...$ и $\lambda > 0$, где λ обозначает различные основные риски аварии, для каждого страхователя. Допустим, что для структурной функции $\lambda \sim gamma(a,\tau)$ и функция распределения плотности вероятностей:

$$u(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1}\tau^{\alpha}\exp(-\tau\lambda)}{\Gamma(\alpha)}, \lambda > 0, \alpha > 0, \tau > 0,$$

со средним зачением $E(\lambda) = \alpha/\tau$ и дисперсией $Var(\lambda) = \alpha/\tau^2$. В таком случае, можно доказать, что безусловное распределение количества исков *k* будет подчиняться закону отрицательного биномиального распределения с функцией плотности вероятностей

$$P(k) = \binom{k+a-1}{k}\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)^{k},$$

со средним значением $E(k) = \alpha/\tau$ и дисперсией $Var(k) = (\alpha/\tau)(1+1/\tau)$. Обозначим через $K = \sum_{i=1}^{t} k_i$ общее количество исков, которые были предъявлены страхователем за *t* лет, где k_i это количество исков, предъявленных страхователем в *i*-м году, *i=1,...,t*. Применим теорему Байеса, и получим апостериорную структурную функцию от λ для страхователя, или группы страхователей с историей страховых случаев $k_1,\ldots,k_t$. Обозначим ее как $u(\lambda\,|\,k_1,\ldots,k_t)$:

$$u(\lambda\,|\,k_1,\ldots,k_t) = \frac{(\tau+t)^{K+\alpha}\lambda^{K+\alpha-1}e^{-(t+\tau)\lambda}}{\Gamma(\alpha+K)},$$

которая является плотностью распределения $gamma(\alpha+K, t+\tau)$. Используя квадратичную функцию ошибки потерь, оптимальное значение λ_{t+1} для каждого страхователя со страховой историей $k_1,\ldots,k_t$ будет равняться среднему значению апостериорной структурной функции, а именно:

$$\lambda_{t+1}(k_1,\ldots,k_t) = \frac{\alpha+K}{t+\tau} = \bar{\lambda}\left(\frac{\alpha+K}{\alpha+t\bar{\lambda}}\right), \text{ где } \bar{\lambda} = \frac{\alpha}{\tau}. \qquad (1)$$

Из сказанного выше становится ясно, что наступление *K* страховых случаев за *t* лет, можно рассчитать, заменив в гамма-функции параметры (α,τ) на $(\alpha+K, t+\tau)$.

1.2. Весовая компонента

Рассмотрим теперь весовую компоненту. Пусть x — размер иска каждого застрахованного. В качестве y будем рассматривать значение среднего размера претензии по каждому застрахованному. Предположим, что условное распределение среднего размера претензий $x \mid y$, для каждого застрахованного это унопараметрическое экспоненциальное распределение с параметром y и плотностью распределения вероятностей

$$f(x \mid y) = \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{y}},$$

где $x > 0$ и $y > 0$. Математическое ожидание $E(x \mid y) = y$, а дисперсия $Var(x \mid y) = y^2$. Среднее значение размера претензии различаться для разных страхователей, поэтому естественно считать, что y также случайная величина с некоторым распределением. Считая, что априорное распределение среднего размера претензий y – это обратное гамма распределение с параметрами s, m и функцией плотности вероятностей

$$g(y) = \frac{\frac{1}{m} \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{\left(\frac{y}{m}\right)^{s+1} \cdot \Gamma(s)}.$$

Математическое ожидание среднего размера претензий имеет вид:

$$E(y) = \frac{m}{s-1}.$$

Безусловное распределение среднего размера претензий будет равняться:

$$P(X = x) = \int_0^\infty f(x \mid y) \cdot g(y) dy = s \cdot m^s \cdot (x+m)^{-s-1},$$

Что есть ничто иное, как плотность распределения Парето с параметрами s и m.

В целях разработки оптимальной бонус-малус системы, которая будет принимать во внимание размер потерь от каждого иска, нам необходимо найти апостериорное распределение среднего размера претензий для каждого страхователя, базируясь на страховой истории за определенный период времени в пределах одного портфеля. Пусть страхователь держит портфель в течении t лет, и количество исков, предъявленных в i-м году, равняется k_i. Тогда общее количество исков за период равно $K = \sum_{i=1}^{t} k_i$, а через x_k размер претензии в k-м иске. Информация, которой мы владеем по размерам страховых претензий — $x_1, \ldots, x_k$, а общее количество претензий определенного страхователя будет равняться $\sum_{k=1}^{K} x_k$. Применяя теорему Байеса, мы находим апостериорное распределение среднего размера претензии y, базируясь на истории страховых случаев $x_1, \ldots, x_k$, которое будет иметь вид:

$$g(y \mid x_1, \ldots, x_k) = \frac{\frac{1}{m + \sum_{k=1}^{K} x_k} \cdot e^{-\frac{m + \sum_{k=1}^{K} x_k}{y}}}{\left(\frac{y}{m + \sum_{k=1}^{K} x_k}\right)^{K+s+1} \cdot \Gamma(K+s)},$$

Что есть ни что иное, как плотность распределения обратной гамма-функции с параметрами $(s+K, m+\sum_{k=1}^{K} x_k)$. Это означает, что наступление K страховых случаев за t лет, с общим размером претензий $\sum_{k=1}^{K} x_k$, можно получить заменой параметров гамма-функции распределения среднего размера претензии $gamma(s,m)$ на $gamma(s+K, m+\sum_{k=1}^{K} x_k)$.

Среднее значение апостериорного распределения среднего размера претензий будет иметь вид:

$$E(x\,|\,y) = \frac{m+\sum_{k=1}^{K} x_k}{s+K-1} \qquad (2)$$

1.3. Расчет премии из принципа чистой страховой премии

Как видно, ожидаемое количество исков $\lambda_{t+1}(k_1,\ldots,k_t)$ для клиента или группы клиентов, которые за t лет предъявили K исков, на общую сумму $\sum_{k=1}^{K} x_k$ исходя из (1) и ожидаемой тяжестью претензий, заданной (2).

Таким образом, чистая страховая премия должны быть выплачена этой группой клиентов будет равняться произведению $\lambda_{t+1}(k_1,\ldots,k_t)$ и $y_{t+1}(x_1,\ldots,x_K)$, т.е.

$$Premium = \frac{\alpha+\tau}{t+\tau}\cdot\frac{m+\sum_{k=1}^{K} x_k}{s+K-1} \qquad (3)$$

Для того чтобы найти размер премии, которая должна быть уплачена, нам необходимо знать:

1. параметры отрицательного биномиального распределения α и τ .
2. пареметры распределения Парето s и m
3. количество лет t, которые клиент находится под наблюдением
4. его количестов исков K и
5. его общий объем претензий $\sum_{k=1}^{K} x_k$

Все эти величины могут быть легко получены, и если принять во внимание, что отрицательное биномиальное распределение часто используется для описания распределения частоты страховых исков, а закон Парето для распределения весовой компоненты, то это значительно расширит применяемость модели.

1.4. Свойства оптимальной бонус-малус системы с частотной и весовой компонентами.

1. Система является справедливой, так как каждый клиент платит премию в соответствии с индивидуальной частотой и размером страховых претензий, учитывая, при использовании теоремы Байеса, всю доступную информацию на настоящий момент в пределах определенного страхового портфеля, как о размерах исков и потерях компании, так и о частоте наступления страховых случаев. Используя точные потери x_k, которые проводятся с каждой претензией, с тем, чтобы различать размер премий для клиентов с одинаковым количеством исков, а не только масштабирования средней тяжести страхового портфеля.
2. Система является финансово сбалансированной. Каждый год среднее значение всех премий от всех клиентов постоянно и равняется

$$P = \frac{\alpha}{\tau}\cdot\frac{m}{\tau-1} \qquad (4)$$

Для того, чтобы доказать это, нужно учесть, что частота исков и их вес являются независимыми компонентами:

$$E_{\Lambda}\left[\Lambda\right]=E\left[E\left[\lambda\,|\,k_1,\ldots,k_t\right]\right]=\frac{\alpha}{\tau}$$

и

$$E_{Y}\left[Y\right]=E\left[E\left[y\,|\,x_1,\ldots,x_k\right]\right]=\frac{m}{s-1}.$$

Доказательство можно найти у Лемэра (1995). [см. 6]

3. В начале, все страхователи платят одинаковую премию, которая равняется (4)
4. Чем больше страховых случаев наступает и чем больше размер претензии, тем выше становиться страховая премия
5. Премия всегда уменьшается, если страховые случаи не наступают
6. У водителей, у которых иск с небольшимим потерями для страховой компании, будет еще одна причина сообщить о наступлении страхового случая, потому что они будут знать, что размер иска будет принят во внимание, и им не прийдется платить ту же премию, что и кому-то другому, у кого произошел несчастный случай с намного большим ущербом для компании. В этом случае качество оценки частоты страховых случаев будет увеличиваться.
7. Весовая компонента, введенная в бонус-малус систему, с практической точки зрения являеться более важной для страховой компании, чем частота наступления страховых случаев для каждого клиента, так как эта компонента определяет расходы страховщика от несчастных случаев, и таким образом, премии должны быть оплачены в соответсвии с этой весовой компонентой.
8. Оценка среднего значения тяжести страхового случая не может быть надежной, и поэтому должна быть подкреплена страховой историей. На практике должны применяться более надежные оценки.

1.5. Оценка параметров системы

С целью немного упростить модель, на нее были наложены некоторые ограничения:

1. Предполагается, что на рынке действует только одна страховая компания *A*, для которой и осуществляется моделирование.
2. Количество клиентов компании равняется 10 000. Предполагаеться, что это значение постоянко (например, обязательное цивильное страхование автомобиля. В таком случае, при наличии только одной страховой компании, такое предположение является допустимым).

Для каждого из 22 классов были вычислены начальные значения параметров: средняя частота страховых случаев для клиента, среднее значение размера страхового иска, начальная премия. Основой для этих вычислений были взяты данные одной украинской страховой компании.

В процессе моделирования, путем изменения значений параметров частотной компоненты (α,τ), были эмпирически определены оптимальные значения этих параметров ($\tilde{\alpha}=0.228, \tilde{\tau}=2.825$) и весовой компоненты *(s,m)* ($\tilde{s}=2.382, \tilde{\tau}=493927.087$). Критерием оптимальности выступал финансовый баланс страховой компании. Для каждого набора значений параметров, проводилось моделирование частоты и размера страховиx выплат для каждого клиента на 7 лет вперед.

Таблица №2

Bonus-Malus система, основанная на частотной компоненте

Год	Количество страховых случаев					
t	0	1	2	3	4	5
0	100					
1	74	398	722	1 046	1 370	1 693
2	59	315	572	829	1 086	1 342
3	48	261	474	687	899	1 112

4	41	223	404	586	768	949
5	36	194	353	511	669	828
6	32	172	313	453	594	734
7	29	155	281	407	533	659

К примеру, бонусы за первый безаварийный год составляют 26%, а водители, у которых будет один страховой случай в течении первого года, должны будут заплатить малус в размере 398% от стартовой премии.

Таблица №3

Сравнение размера премий в зависимости от количества и размера страхового иска за первый год.

Количество страховых случаев					
Размер Иска	1	2	3	4	5
2 500	1 002	1 819	2 635	3 451	4 268
5 000	1 339	2 430	3 521	4 611	5 702
10 000	2 013	3 652	5 292	6 932	8 571
20 000	3 361	6 098	8 835	11 572	14 309
30 000	4 708	8 543	12 377	16 212	20 056
40 000	6 056	10 988	15 920	20 852	25 784

На таблице №3 (в качестве примера) приведены размеры страховых премий, которые должны быть выплачены, в случае если клиент компании, за первый год с его текущим портфелем, при разных количествах страховых случаев от 1 до 5 и общим размером страхового иска от 2 500 до 40 000 гривен.

Выводы

В данной работе было проведено моделирование оптимальной бонус-малус системы. Были эмпирически определены оптимальные значения параметров частотной и весовой компонент, которые приводят к наибольшей финансовой прибыли страховой компании. Данная система принимает во внимание индивидуальные характеристики каждого водителя, позволяя более точно определить размер страховой премии для каждого клиента не только в зависимости от его априорных характеристик (возраст, пол, стаж вождения, параметры автомобиля), но и от его личностных качеств, как непосредственно водителя транспортного средства. Разработка подобных система очень актуальна. В перспективе является интересным расчет оптимального времени изменения страховых премий, и дальнейшее усложнение модели, с целью максимально точно описать процесс функционирования страховой компании в условиях свободного рынка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Bening V.E. & Korolev V.Yu. (2002) Generalized Poisson Models and their Applications in Insurance and Finance, Brill Academic Publishers, Utrecht
2. Boland P.J. (2007) Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science, Chapman & Hall, Boca Raton.
3. Chan W.-S. & Tse Y.-K. (2007) Financial and Actuarial Mathematics, McGraw Hill, Asia.
4. Denuit M. & Marechal X. & Pitrebois S. & Walhin J.-F. (2007) Actuarial Modeling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus System, John Wiley & Sons, Chichester
5. De Vylder F.E. & Goovaerts M. & Haezendonck J. (editors) (1984) Premium Calculation in Insurance, Kluwer Academic Publishers, Boston. (collection of articles)
6. Lemaire J. (1995) Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance, Kluwer Academic Publisers, Boston.
7. Tse Y.-K. (2009) Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation, Cambridge University Press, Cambridge.

Рецензент: Вейцблит О.Й.